Extrait de cours maths 3e

Multiples et diviseurs

I) Multiples et diviseurs

Un **multiple** d'un nombre est un produit dont un des facteurs est ce nombre. Un **diviseur** du produit est un facteur de ce produit.

On emploie aussi l'expression "…est divisible par ..." pour dire "…est un multiple de ...".
Les trois expressions suivantes sont équivalentes :
"… est un multiple de ..."
"… est divisible par ..."
"… a pour diviseur ..."

Exemples

$3 \times 7 = 21$ donc
21 est un multiple de 3 et de 7.
21 est divisible par 3 et par 7.
3 et 7 sont des diviseurs de 21.

$8 \times 31 = 248$ donc
248 est un multiple de 8 et de 31.
248 est divisible par 8 et par 31.
8 et 31 sont deux diviseurs s de 248.

Le mot « diviseur » employé ici n'a pas exactement le même sens que le mot « diviseur » dans un quotient. C'est bien sûr toujours par lui que l'on divise, mais la division doit "tomber juste" (le quotient est un nombre entier). On ne confondra pas donc le diviseur dans une division et un diviseur d'un nombre.

Exemple

Lorsque l'on écrit $25 \div 4 = 6{,}25$, 4 est le diviseur dans la division; mais 4 n'est pas un diviseur de 25 puisque le quotient de 25 par 4 n'est pas un nombre entier.
Par contre lorsque l'on écrit $24 \div 6 = 4$, 4 est le diviseur dans la division et comme le quotient est un nombre entier, 4 est un diviseur de 24.

Tout multiple d'un entier n peut s'écrire sous la forme $k \times n$ (k étant un entier).

Réciproquement, tout nombre qui peut s'écrire sous la forme $k \times n$ (avec k et n entiers) est un multiple de n (et de k).

Remarques à propos de 0 et de 1 :

Le produit de n'importe quel nombre par 0 est 0. **0 est** donc **un multiple** de tous les nombres.
Aucun produit dont un facteur est 0 ne peut être différent de 0, donc **0 n'est diviseur d'aucun nombre**.
Le quotient de n'importe quel nombre par 1 est égal à ce nombre. **1 est** donc **un diviseur de tous les nombres**.

II) <u>Règles de base</u>

La somme de deux multiples d'un même nombre a est un multiple de a.

La différence de deux multiples d'un même nombre a est un multiple de a.

Si b est un multiple de a, il peut s'écrire k × a.
Si c est un multiple de a, il peut s'écrire k' × a.
Alors b + c = k × a + k' × a = (k + k') × a qui est un multiple de a.
Et b − c = k × a − k' × a = (k − k') × a qui est aussi un multiple de a.

Conséquence

Pour reconnaître des multiples d'un nombre, il est possible de soustraire successivement des multiples simples de ce nombre.
Par exemple, pour savoir si 21 743 est un multiple de 7, on peut soustraire successivement 21 000 (= 3 000 × 7), 700 et 42 ; il reste 1 qui n'est pas multiple de 7.

Tout multiple d'un entier a est multiple des diviseurs de a.

Ou bien, dit autrement : Si c est un diviseur de b et b un diviseur de a, alors c est un diviseur de a.

Ou encore : Si a est multiple de b et b multiple de c, alors a est multiple de c.

Si a est multiple de b, il peut s'écrire k × b.
Si b multiple de c, il peut s'écrire k' × c.
Alors a = k × (k' × c) = (k × k') × c ; ainsi a est un multiple de c.

Exemple

12 est multiple de 6 et 6 est multiple de 3, donc 12 est multiple de 3.
400 est multiple de 100 et 100 est multiple de 25, alors 400 est multiple de 25.
8 est un diviseur de 24 et 24 est diviseur de 120, donc 8 est un diviseur de 120.

Exercices

Exercice 1

1. Citer dans l'ordre croissant, trois multiples de 5 que l'on notera a, b et c.
2. Calculer : $a + b$; $a + c$; $b + c$; $b - a$; $c - a$ et $c - b$.
3. Quelle conjecture peut-on émettre ?
4. Les entiers r et s sont deux multiples de 7. Écrire r et s sous forme littérale.
5. Démontrer que $r + s$ est un multiple de 7.

Exercice 2

1. Soit x un entier naturel non nul. Donner une écriture littérale de l'entier « qui le suit », puis de l'entier « qui le précède ».
2. Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
3. La somme de quatre entiers consécutifs est-elle un multiple de 4 ?
4. Dans une liste de cinq entiers consécutifs, on isole le troisième. Démontrer que la somme des quatre entiers restants est un multiple de 4.
5. Peut-on généraliser une règle pour une somme de n entiers consécutifs ?

Exercice 3

Démontrer que la somme de trois multiples consécutifs de 3 est un multiple de 9.

Exercice 4

La somme de quatre multiples consécutifs de 7 est égale à 266. Quels sont ces quatre entiers ?

Exercice 5

1. L'entier n est un multiple de 12. Écrire n sous forme littérale.
2. En utilisant cette écriture, montrer que n est un multiple de 4.
3. Énoncer la propriété qui se trouve ainsi démontrée.
4. Démontrer que : « si un entier est multiple de 36, alors il est multiple de 9 ».
5. La réciproque de cette propriété est-elle vraie ?

Exercice 6

1. Donner l'écriture littérale d'un nombre pair, puis celle d'un nombre impair.
2. Étudier la parité de la somme, de la différence et du produit de deux entiers a et b (avec $a > b$) lorsque :
   - a et b sont tous les deux pairs ;
   - a et b sont tous les deux impairs ;
   - a est impair et b est pair.

Exercice 7

Démontrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4.
En est-il de même de la somme de deux nombres pairs consécutifs ?
Démontrer que le carré d'un nombre pair est un multiple de 4.
Démontrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.
Démontrer que la différence des carrés de deux entiers naturels consécutifs est un entier impair.

1 Critères de divisibilité

On appelle « critère de divisibilité » une méthode qui permet de reconnaître, sans effectuer le calcul du quotient, qu'un nombre est divisible par un autre. Ou bien, c'est équivalent, de reconnaître les multiples d'un nombre.

I) Les multiples de 2

Ce sont les nombres pairs. Le chiffre des unités est 0 ou 2 ou 4 ou 6 ou 8.

II) Les multiples de 3 et de 9

Appelons « somme réduite » (notée S_R) le nombre inférieur à 10, obtenu par la somme des nombres représentés par les chiffres du nombre. Tant que cette somme est supérieure à 10, on recommence le procédé.

Exemples

Pour 351 : $S_R = 3 + 5 + 1 = 9$
Pour 835 : $8 + 3 + 5 = 16$ puis $S_R = 1 + 6 = 7$

Si S_R est égale à 9, alors le nombre est un multiple de 9, et donc de 3.

Si S_R est égale à 3 ou 6, alors le nombre est un multiple de 3, mais pas de 9.

Exemples

Pour 351 : $3 + 5 + 1 = 9$, donc 351 est divisible par 9 donc par 3.
Pour 12 066 : $S_R = 1 + 2 + 6 + 6 = 15$, puis $S_R = 6$, donc 12 066 est divisible par 3 mais pas par 9
Pour 835 : $8 + 3 + 5 = 16$ puis $1 + 6 = 7$, donc 835 n'est pas multiple de 3, ni de 9.

Justification de cette règle

Tout nombre entier peut être décomposé en somme de ses différents ordres :

$43\,281 = 40\,000 + 3\,000 + 200 + 80 + 1$

$40\,000 = 4 \times 10\,000 = 4 \times (9\,999 + 1) = 4 \times 9\,999 + 4$

$3\,000 = 3 \times 1\,000 = 3 \times (999 + 1) = 3 \times 999 + 3$

$200 = 2 \times 100 = 2 \times (99 + 1) = 2 \times 99 + 2$

$80 = 8 \times 10 = 8 \times (9 + 1) = 8 \times 9 + 8$

$43\,281 = (4 \times 9\,999 + 4) + (3 \times 999 + 3) + (2 \times 99 + 2) + (8 \times 9 + 8) + 1$

$43\,281 = (4 \times 9\,999 + 3 \times 999 + 2 \times 99 + 8 \times 9) + (4 + 3 + 2 + 8 + 1)$

$$43\,281 = \underbrace{9 \times (4 \times 1\,111 + 3 \times 111 + 2 \times 11 + 8 \times 1)}_{\text{multiple de 9}} + \underbrace{(4 + 3 + 2 + 8 + 1)}_{S_R}$$

La question de savoir si 43 281 est multiple de 9 (ou de 3) revient donc à savoir si S_R est multiple de 9 (ou de 3).

III) Les multiples de 4

Le nombre formé par les deux derniers chiffres doit être lui-même un multiple de 4.

Tout nombre supérieur à 100 (plus de deux chiffres) peut être décomposé en deux parties : les centaines et un nombre inférieur à 100 (formé par les deux derniers chiffres).
100 étant un multiple de 4, les centaines formeront toujours un multiple de 100.

Exemple

1 672 = 1 600 + 72 = 16 × 100 + 72 = 16 × 25 × 4 + 72.
1 672 sera un multiple de 4 si 72 est un multiple de 4.
Ce nombre doit alors être pair, et sa moitié aussi. C'est à dire qu'il est divisible deux fois de suite par 2. Ce qui est le cas pour 72.

Exemples

88 est pair; sa moitié 44 est pair, donc 88 est un multiple de 4. C'est 4 × 22.
Pour 1 756, on s'intéresse à 56 : il est pair, sa moitié 28 est pair, donc 1 756 est divisible par 4.
Pour 838, on s'intéresse à 38 : il est pair, mais sa moitié 19 est un nombre impair, donc 838 n'est pas un multiple de 4.

IV) Les multiples de 5

Le chiffre des unités est 0 ou 5.

V) Divisibilité par 7

La méthode et un exemple

On barre le chiffre des unités et on retire son double au nombre restant.
Le nouveau nombre obtenu est-il un multiple de 7?
Si oui, alors le nombre initial l'est aussi.
Si non, alors le nombre initial ne l'est pas non plus.
Si on ne sait pas conclure, on recommence avec ce nombre ce que l'on a fait précédemment.

40 901
4 090 – 2 = 4 088
On recommence :
408 – 16 = 392
On recommence :
39 – 4 = 35
C'est un multiple de 7, donc 40 901 est un multiple de 7.

Une présentation pratique des calculs

Pour le nombre 678 047

6	7	8	0	4	~~7~~
		–	1	4	
6	7	7	9	~~0~~	
	–	1	8		
6	7	6	~~1~~		
	–	2			
6	7	~~4~~			
–	8				
5	9				

59 n'est pas un multiple de 7, donc 678 047 non plus.

Pour des nombres de 3 chiffres, le calcul peut se faire de tête :
301 $\longrightarrow$ 30 – 2 = 28 $\longrightarrow$ multiple de 7.
458 : 45 – 16 = 29 . Pas multiple de 7.

448 : 44 – 16 = 28. Multiple de 7.
622 : 62 – 4 = 58 . Pas multiple de 7.
973 : 97 – 6 = 91   9 – 2 = 7 . Multiple de 7.
419 : 41 – 18 = 23. Pas multiple de 7.

Justification de la méthode (pour un nombre de trois chiffres)

Un nombre n de trois chiffres s'écrivant $\overline{abc}$ a pour valeur 100a + 10b + c
En barrant le chiffre des unités, on forme un nouveau nombre à deux chiffres s'écrivant $\overline{ab}$ qui a pour valeur 10a + b.
À ce nombre, on retire le double du chiffre des unités initial.
On forme ainsi un nouveau nombre n' = 10a + b − 2c.

La méthode consiste à dire que si n' est multiple de 7, alors n l'est aussi.

Si n' est multiple de 7, n' peut s'écrire 7k, avec k entier.
C'est-à-dire que 10a + b − 2c = 7k, d'où 10a + b = 7k + 2c
n = 100a + 10b + c = 10(10a +b) + c.
En remplaçant 10a + b par 7k + 2c, on a n = 10(7k + 2c) + c
En simplifiant cette écriture, on obtient : n = 70k + 21c = 7(10k + 3c)
n est donc bien un multiple de 7.

VI) Divisibilité par 11

La méthode et un exemple

On calcule la somme des chiffres de rangs impairs (le premier, le troisième, le cinquième, etc.)
On calcule la somme des chiffres de rangs pairs (le deuxième, le quatrième, le sixième , etc.)
On calcule la différence entre ces deux sommes.
Si cette différence est un multiple de 11, alors le nombre initial l'est aussi.
Sinon le nombre initial ne l'est pas non plus.

Pour le nombre 87 494
Rangs impairs : 8 + 4 + 4 = 16
Rangs pairs : 7 + 9 = 16
Différence : 16 – 16 = 0.
C'est un multiple de 11, donc 87 494 aussi.

Pour le nombre 720 259
Rangs impairs : 7 + 0 + 5 = 12
Rangs pairs : 2 + 2 + 9 = 13
Différence : 13 – 12 = 1
Ce n'est pas un multiple de 11, donc 720 259 non plus.

Cette méthode peut se traduire aussi par :
On calcule la "somme alternée" (soustraction, puis addition, pui soustraction, …) de l'ensemble des chiffres.

Exemples :

pour 707 487 : 7 – 0 + 7 – 4 + 8 – 7 = 11. C'est un multiple de 11.
pour 2 315 263 : 2 – 3 + 1 – 5 + 2 – 6 + 3 = – 6 . Ce n'est pas un multiple de 11.

Pour des nombres de 3 chiffres

En appliquant cette méthode à des nombres de 3 chiffres, on peut, en plus, retrouver le quotient par 11.
On ajoute le premier et le dernier chiffre, et on retire le deuxième.
Si on obtient autre chose que 0 ou 11, le nombre n'est pas divisible par 11.
Si on obtient 0, le nombre est un multiple de 11, et il suffit de barrer le chiffre des dizaines pour obtenir le quotient par 11.
Si on obtient 11, le nombre est un multiple de 11; il suffit de retirer 1 aux centaines et barrer le chiffre des dizaines pour obtenir le quotient par 11.

Exemples :

716 : 7 + 6 – 1 = 12. Pas multiple de 11

473 : 4 + 3 – 7 = 0. Multiple de 7 et 473 ÷ 11 = 4~~7~~3 = 43
825 : 8 + 5 − 2 =11 . Multiple de 11 et 825 ÷ 11 = (8 – 1)~~2~~5 = 75

VII) Divisibilité par 13

La méthode et un exemple

On barre le chiffre des unités et on ajoute son quadruple au nombre restant.
Le nouveau nombre obtenu est-il un multiple de 13?
Si oui, alors le nombre initial l'est aussi.
Si non, alors le nombre initial ne l'est pas non plus.
Si on ne sait pas conclure, on recommence avec ce nombre ce que l'on a fait précédemment.

Pour le nombre 3 237
323 + 28 = 351
On recommence :
35 + 4 = 39
C'est un multiple de 13, donc 3 237 aussi.

Une présentation pratique des calculs

Pour le nombre 451 487

	4	5	1	4	8	~~7~~
			+	2	8	
	4	5	1	7	~~6~~	
		+	2	4		
	4	5	4	~~1~~		
		+	4			
	4	5	~~8~~			
+	3	2				
	7	7				

77 n'est pas un multiple de 13, donc 451 487 non plus.

Pour des nombres de 3 chiffres

Le calcul peut se faire de tête :
436 : 43 + 24 = 67. Pas multiple de 13.
312 : 31 + 8 = 39. Multiple de 13.
612 : 61 + 8 = 69. Pas multiple de 13.
975 : 97 + 20 = 117 = 9 × 13 . Multiple de 13.

Justification de la méthode (pour un nombre de trois chiffres)

Un nombre n de trois chiffres s’écrivant $\overline{abc}$ a pour valeur 100a + 10b + c
On barre le chiffre des unités et on ajoute son quadruple au nombre restant.
On forme ainsi un nouveau nombre n’ = 10a + b + 4c.

La méthode consiste à dire que si n’ est multiple de 13, alors n l’est aussi.

Si n’ est multiple de 13, n’ peut s’écrire 13k, avec k entier.
C'est-à-dire que n’ = 10a + b + 4c = 13k, d’où 10a + b = 13k − 4c
n = 100a + 10b + c = 10(10a +b) + c
En remplaçant 10a + b par 13k − 4c
n = 10(13k − 4c) + c = 130k − 40c + c = 130k − 39c
En factorisant :
n = 130k − 39c = 13(10k − 3c)
On fait ainsi apparaître un multiple de 13.

VIII) Divisibilité par 17

La méthode et un exemple

On barre le chiffre des unités et on retire son quintuple au nombre restant.
Le nouveau nombre obtenu est-il un multiple de 17?
Si oui, alors le nombre initial l'est aussi.
Si non, alors le nombre initial ne l'est pas non plus.
Si on ne sait pas conclure, on recommence avec ce nombre ce que l'on a fait précédemment.

Pour 11 679
1 167 – 45 = 1 122
On recommence :
112 – 10 = 102
On recommence :
10 – 10 = 0.
C'est un multiple de 17, donc 11 679 est un multiple de 17.

Une présentation pratique des calculs.

Pour le nombre 956 090

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 9 & 5 & 6 & 0 & 9 & \cancel{0} \\
 & & & - & & 0 & \\
\hline
 & 9 & 5 & 6 & 0 & \cancel{9} & \\
 & & - & 4 & 5 & & \\
\hline
 & 9 & 5 & 1 & \cancel{5} & & \\
 & - & 2 & 5 & & & \\
\hline
 & 9 & 2 & \cancel{6} & & & \\
- & 3 & 0 & & & & \\
\hline
 & 6 & 2 & & & &
\end{array}$$

62 n'est pas un multiple de 17, donc 956 090 non plus.

Pour des nombres de 3 chiffres

Le calcul peut se faire de tête :
657 : 65 – 35 = 30. Pas multiple de 17
272 : 27 – 10 = 17. Multiple de 17
578 : 57 – 40 = 17. Multiple de 17
972 : 97 – 10 = 87. Pas multiple de 17
Cela suppose de connaître les cinq premiers multiples de 17.

Exercices

$\overline{abcd}$ est l'écriture décimale du nombre : $a \times 1\,000 + b \times 100 + c \times 10 + d \times 1$

Exercice 8

On appelle **nombre parfait** un nombre entier naturel qui est égal à la somme de tous ses diviseurs « propres » (autres que lui-même).
Les diviseurs de 6 sont : 1, 2, 3 et 6.
1 + 2 + 3 = 6. Le nombre 6 est donc un nombre parfait.

Les entiers naturels 15, 28 et 496 sont-ils des nombres parfaits ?

Exercice 9

Démontrer que 1 001 est un diviseur de tout entier du type : $\overline{abcabc}$
En déduire que 91 est un diviseur de tout entier du type : $\overline{abcabc}$

Exercice 10

Calculer : $13 \times 11 \times 7$; en déduire, sans poser d'opération, que : 13, 77 et 143 sont des diviseurs de 325 325.
Proposer d'autres nombres de six chiffres divisibles par 13, 77 et 143.

Exercice 11

x et y sont deux entiers compris entre 0 et 9.

a = $\overline{2\,7xy}$ est l'écriture décimale d'un nombre à quatre chiffres dans lequel x est le chiffres des dizaines et y celui des unités.

b = $\overline{10\,x8y}$ est l'écriture décimale d'un nombre à cinq chiffres dans lequel x est le chiffres des centaines et y celui des unités.
Déterminer la valeur de x et de y dans chacun des cas suivants :

a) a et b sont divisibles par 6.
b) a et b sont divisibles par 15

Exercice 12

Trouver un diviseur de cinq chiffres de tout nombre du type : $\overline{ababab}$ (tels 121 212 ou 737 373). En déduire d'autres diviseurs de tout nombre du type : $\overline{ababab}$

Exercice 13

1. Les nombres suivants sont-ils des multiples de 7 ?

54 635	689 160	4 223	877
137 361	150 150	122 796	2 499 994
655 489	19 502	44 821	31 400

2. Quel raccourci de méthode lorsque le nombre se termine par des 0?
3. La méthode est-elle vraiment utile pour des nombres comme :

735	147 756	2 128 147	70 063 ? Expliquer.

Exercice 14

Justification de la méthode divisibilité par 11.
Pour un nombre de trois chiffres s'écrivant $\overline{abc}$, montrer que si (a + c − b) est un multiple de 11 alors $\overline{abc}$ est un multiple de 11.

Exercice 15

Les nombres suivants sont-ils des multiples de 11 ?

7 524	106 095	6 622	5 758
1 046 320	112 233	705 487	109 846

Exercice 16

Les nombres suivants sont-ils des multiples de 13 ?

47 073	68 164	34 293	871
137 851	130 120	322 496	2 439 974
685 489	22 502	60 821	94 400

Exercice 17

Justification de la méthode divisibilité par 17, pour un nombre de trois chiffres.
S'inspirer des justifications données dans la leçon pour les divisibilités par 7 et par 13.

Exercice 18

Les nombres suivants sont-ils des multiples de 17 ?

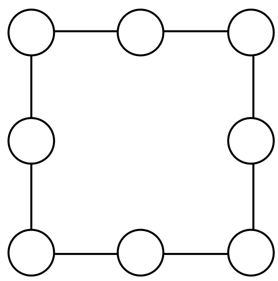
54 635	689 146	4 216	867
134 361	158 150	322 706	4 499 989
45 629	39 572	94 867	62 500

Exercice 19

Trouver un nombre de cinq chiffres qui soit amphidrome (il se lit dans les deux sens en gardant la même valeur. par exemple : 14 541) et qui soit divisible par 3, par 5 et par 11.

Exercice 20

Répartir les 8 chiffres de 1 à 8, de manière à former quatre nombres de 3 chiffres qui soient tous multiples de 9.



Exercice 21

Placer les 9 chiffres de 1 à 9, de manière à obtenir trois nombres qui soient multiples de 11.