EXTRAIT DE COURS DE MATHS DE 4E

1 La médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un angle

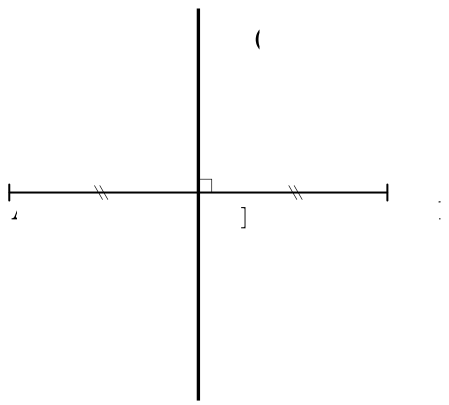
La médiatrice d'un segment

> Définition : La **médiatrice** d'un segment est l'axe de symétrie de ce segment ; c'est-à-dire que les extrémités du segment sont symétriques par rapport à la médiatrice.

Si A et B sont symétriques par rapport à (Δ) alors cela a deux conséquences : (Δ) ⊥ (AB) et (Δ) coupe [AB] en son milieu.
De cette définition de la symétrie centrale, il découle une première propriété (double) de la médiatrice :

> Propriété 1 : **Si** une droite est perpendiculaire à un segment en son milieu, **alors** c'est sa médiatrice.
>
> Réciproquement : si une droite est médiatrice d'un segment, alors elle est perpendiculaire à ce segment en son milieu.

On adoptera donc le codage suivant pour la médiatrice d'un segment :



Traduction :

Hypothèses	Conclusion
I milieu de [AB] (Δ) ⊥ [AB] I ∈ (Δ)	(Δ) médiatrice de [AB]

Une propriété essentielle des symétries est que deux segments symétriques ont la même longueur (sont superposables par pliage).
Si un point M est sur la médiatrice (Δ) de [AB], alors M est son propre symétrique et A et B sont symétriques, donc les segments [MA] et [MB] sont symétriques. Et, puisqu'ils sont symétriques, ils sont de même longueur.

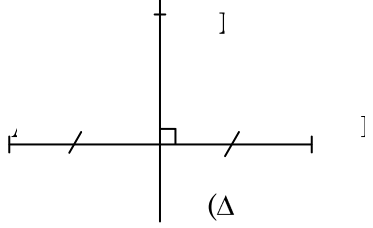
<u>Propriété 2</u> : Si un point est situé sur la médiatrice d'un segment, **alors** il est à égale distance de ses extrémités.

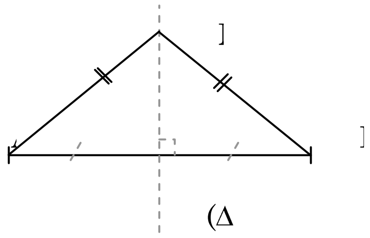
<u>Traduction</u> :

Hypothèses	Conclusion
(Δ) médiatrice de [AB] M ∈(Δ)	MA = MB

<u>Figure</u> :

Hypothèses	Conclusion

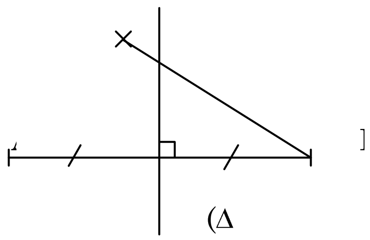




Sur le premier, on fait apparaître les conditions (M ∈ (Δ) et (Δ) médiatrice de [AB]).
Sur le deuxième, on ne fait apparaître que le fait que M est équidistant des extrémités.

<u>Réciproque de la propriété 2</u> : Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, **alors** il est sur sa médiatrice.

En effet, supposons un segment [AB], sa médiatrice (Δ) et un point M, hors de (Δ) tel que MA = MB.
Supposons que M soit plutôt du côté de A (le raisonnement serait identique s'il était du côté deB).
Alors (MB) coupe (Δ) en un point que l'on nomme N.
Les points M, N et B étant alignés,
MB = MN + NB
Mais N étant un point de (Δ), NB = NA
donc MB = MN + NA
Mais par hypothèse, MA = MB.
On doit donc avoir MA = MN + NA.
Ce qui contredit le principe de l'inégalité triangulaire.
Conclusion : l'hypothèse émise (un point M, hors de (Δ) tel que MA = MB) est impossible.

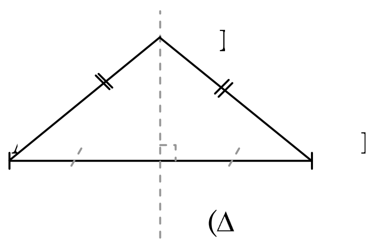


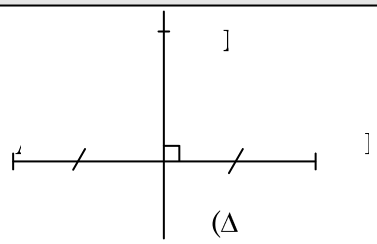
<u>Traduction</u> :

Hypothèses	Conclusion
MA = MB (Δ) médiatrice de [AB]	M ∈ (Δ)

Figure :

Hypothèses	Conclusion





<u>Deux propriétés, deux constructions</u>

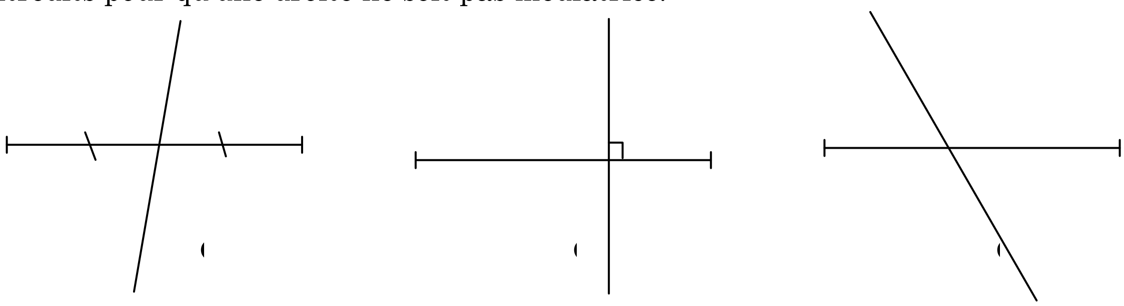
Chaque méthode de construction de la médiatrice est une application d'une des propriétés.
<u>Propriété 2</u>
Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors c'est un point de la médiatrice de ce segment.
<u>Construction</u>
On place un premier point à égale distance des deux extrémités en traçant deux arcs de cercle de même rayon dont les centres sont les extrémités du segment.
Puis on en place un second de la même manière.
Les rayons pour le premier point et pour le deuxième n'ont **pas besoin** d'être les mêmes. (mais garder le même rayon ne pose pas de problème).

<u>Propriété 1</u>
Si une droite est perpendiculaire à un segment en son milieu, alors c'est la médiatrice de ce segment.

C'est la construction habituelle avec l'équerre graduée.

Négation de la propriété

Dans la propriété 1 (Si une droite est médiatrice d'un segment, alors elle est perpendiculaire à ce segment en son milieu) il y a deux éléments qui peuvent être contredits pour qu'une droite ne soit pas médiatrice.



Dans le cas ❶ : La droite coupe le segment en son milieu mais non perpendiculairement.
Dans le cas ❷ : La droite est perpendiculaire au segment mais pas en son milieu.
Dans le cas ❸ : aucun des deux éléments n'est vérifié.

Quand une propriété contient deux hypothèses (milieu et perpendiculaire) il suffit que l'une des deux soit contredite (ou niée) pour que la conclusion soit fausse.

La propriété :

Si une droite est médiatrice d'un segment, alors elle est perpendiculaire à ce segment en son milieu.

A sa forme négative :

Si une droite n'est pas perpendiculaire au segment ou bien ne passe pas en son milieu, alors ce n'est pas la médiatrice de ce segment.

Bissectrice d'un angle

> Définition : La **bissectrice** d'un angle est l'axe de symétrie de cet angle ; c'est-à-dire que les deux côtés de l'angle sont symétriques par rapport à la bissectrice.

D'après cette définition, la bissectrice est une droite (un axe de symétrie est une droite). Selon les époques et les auteurs, la bissectrice peut désigner une droite ou une demi-droite.

On peut considérer que la droite (ut) est la bissectrice de $\widehat{xOy}$

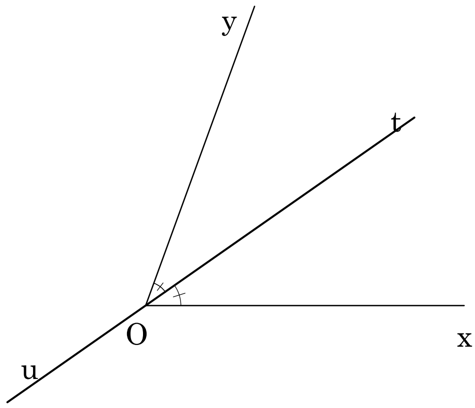
Certains considèrent que c'est la demi-droite [Ot) qui est la bissectrice de $\widehat{xOy}$

Alors que [Ou) serait la bissectrice de l'angle rentrant $\widehat{yOx}$

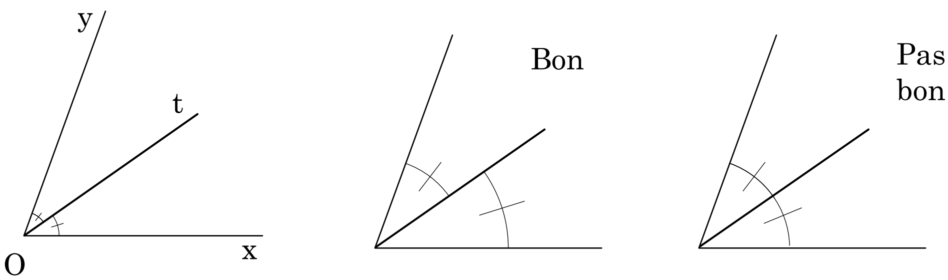
Certains considèrent que [Ot) est la bissectrice **intérieure** de $\widehat{xOy}$ et que [Ou) est la bissectrice **extérieure** de $\widehat{xOy}$.

Pour ce qui nous concerne, nous admettons que la bissectrice peut être, selon les circonstances, la droite toute entière et nous le préciserons alors.

C'est la demi-droite que nous représenterons la plupart du temps.



Nous adopterons le codage suivant pour la bissectrice.



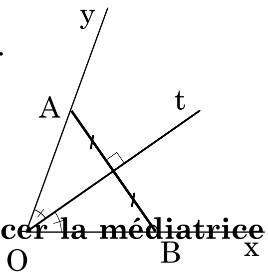
Constructions de la bissectrice d'un angle

La construction la plus immédiate est l'utilisation du **rapporteur** et elle consiste à mesurer l'angle, en calculer la moitié puis placer la bissectrice qui coupe l'angle en deux parties égales. (Cette construction ressemble à la construction du milieu d'un segment avec la règle graduée).

Si l'on veut faire intervenir la notion de symétrie, il y aura alors diverses constructions possibles, selon les instruments utilisés ; et toutes celles que nous proposons ici utilisent en fait la **construction de la médiatrice** d'un segment.

Car O est son propre symétrique par rapport à la bissectrice.

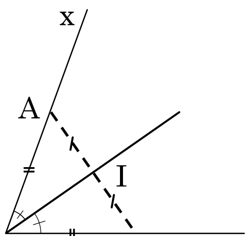
[Ot) est la bissectrice de $\widehat{xOy}$ est équivalent à (Ot) médiatrice de [AB] à la condition que OA soit égale à OB.



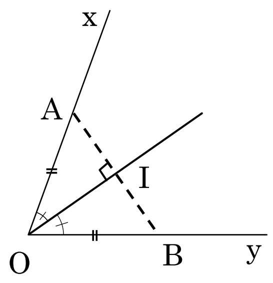
La construction de la bissectrice consiste donc à tracer la médiatrice de [AB] après avoir placé A et B à la même distance de O.

Plusieurs constructions possibles

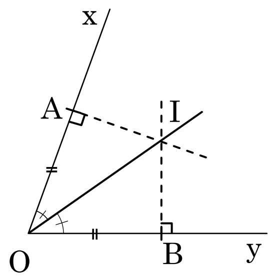
1. **Avec la règle graduée**
   Placer A sur [Ox) et B sur [Oy) tels que OA = OB
   Placer le milieu I de [AB]
   (OI) est la bissectrice de $\widehat{xOy}$



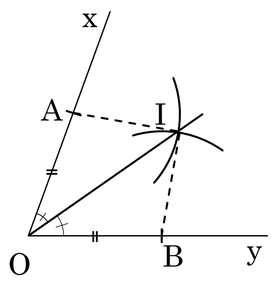
2. **Avec une équerre graduée 1**
   Placer A sur [Ox) et B sur [Oy) tels que OA = OB
   La perpendiculaire à (AB) passant par O coupe (AB) en I.
   (OI) est la bissectrice de $\widehat{xOy}$



3. **Avec une équerre graduée 2**
   Placer A sur [Ox) et B sur [Oy) tels que OA = OB
   La perpendiculaire à [Ox) passant par A et la perpendiculaire à [Oy) passant par B se coupent I.
   (OI) est la bissectrice de $\widehat{xOy}$



4. **Avec le compas**
   Tracer un arc de centre O qui coupe [Ox) en A et [Oy) en B
   De même rayon, tracer un arc de centre A et un autre de centre B qui se coupent en I.
   (OI) est la bissectrice de $\widehat{xOy}$



Exercices

Exercice 1

Les phrases suivantes sont-elles correctes? Indiquer les formulations ou les notations qui posent problème.

a) M est le point tel que AM = 2 cm.
b) 3 est inférieur ou égal à 5.
c) Soit (D) la parallèle à (AB).
d) Soit ($\mathcal{C}$) le cercle de centre A.
e) M est un point tel que AM = 4 cm.
f) 4 est inférieur ou égal à 4.
g) 8 est un nombre pair et un multiple de 3.
h) Soit (D') une perpendiculaire à (D).
i) Soit (D') la parallèle à (D) passant par M.

Exercice 2

Trois points A, B et C sont non alignés.
Recopier et compléter les phrases suivantes avec l'article qui convient:

a) Soit ($\mathcal{C}$) • cercle passant par A et par B et ne contenant pas C.
b) Soit (D) • perpendiculaire en A à la droite (AB).
c) Soit ($\mathcal{C}$') • cercle, distinct de ($\mathcal{C}$), passant par les trois points A, B et C.
d) Soit (D') • parallèle à (D) sécante au cercle ($\mathcal{C}$').
e) Soit E • point d'intersection de (D') et de ($\mathcal{C}$').
f) On appelle (D") • parallèle à • droite (AB), passant par E.
g) A et B sont • points d'intersection des cercles ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}$').

Exercice 3

Réécrire correctement les phrases suivantes

a) (AB) est $\perp$ à (FC).
b) $[AI]^2 = 16$ donc $[AI] = 4$
c) M est la moitié de AB.
d) est le milieu du cercle ($\mathcal{C}$).
e) (AH) est la médiatrice de (BC).
f) Si $\widehat{BAC} = 90°$, alors elles sont perpendiculaires.
g) Ox est la bissectrice du triangle BOA.
h) M est la perpendiculaire qui croise (AB) au point H.

Exercice 4

Rédiger le programme de construction d'un triangle équilatéral au compas.
Construction de l’hexagone régulier.

Sur un cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon r, placer les six points A, B, C, D, E et F dans cet ordre tels que AB = BC = CD = DE = EF = r.

Quelle est la nature de chacun des triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEF et OFA ?
Quelle est la mesure de chacun des angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, $\widehat{EOF}$ et $\widehat{FOA}$?
Quelle est la mesure de chacun des angles $\widehat{AOD}$, $\widehat{BOE}$ et $\widehat{COF}$?
Que peut-on en conclure pour les segments [AD], [BE] et [CF] ?
En déduire
La construction du dodécagone régulier (douze sommets)
La construction d'un angle de 60° au compas.
La construction d'un angle de 30° au compas.

Exercice 5

Construction d'un rapporteur simplifié.
Tracer un segment [AB] de 10 cm.
Tracer sa médiatrice qui le coupe en O.
Placer C et D sur la médiatrice, de chaque côté de O, à 5 cm de O.
Placer E à l'intérieur de l'angle $\widehat{BOC}$ tel que COE soit équilatéral.
Placer F à l'intérieur de l'angle $\widehat{BOC}$ tel que BOF soit équilatéral.
Placer G à 5 cm de O, tel que [OG) soit la bissectrice de $\widehat{BOE}$.
Placer H à 5 cm de O, tel que [OH) soit la bissectrice de $\widehat{EOF}$.
Placer I à 5 cm de O, tel que [OI) soit la bissectrice de $\widehat{COF}$.
Placer les symétriques des points E, F, G, H et I par rapport à (OC).
Tracer le demi-cercle de diamètre [AB] passant par tous ces points.
Puis découper le demi-disque.
On obtient ainsi un rapporteur gradué de 15° en 15° qui est souvent bien suffisant pour des mesures approchées.

Exercice 6

[LM] est un segment de 15 cm. N est un point de la droite (LM) vérifiant MN = 4 × LN.
Expliquer et construire les deux positions possibles de ce point N.

Exercice 7

Montrer que les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires sont perpendiculaires.

Exercice 8

ABC est un triangle tel que $\widehat{ABC} = 2 \times \widehat{ACB}$.
Montrer que la bissectrice de $\widehat{ABC}$, [AC] et la médiatrice de [BC] sont concourant(e)s.
Proposer d'autres rédactions possibles de la question précédente.
Par exemple : Montrer que la bissectrice de $\widehat{ABC}$ et la médiatrice de [BC] sont sécantes sur [AC].