Extrait de cours de maths de 5e

Chapitre 1 : Arithmétique

1. Multiples et diviseurs

Définition

Si, dans une division de D par d, le reste est nul, alors on dit que D est un **multiple** de d, que d est un **diviseur** de D.

Montrer que A est multiple de n, c'est trouver un nombre entier k tel que $A = k \times n$

Par exemple, dans la division euclidienne de 54 par 6, le quotient euclidien est égal à 9 et le reste est égal à 0 : $54 = 6 \times 9$
On dit que 54 est **divisible par** 6.
54 est un **multiple** de 6 et 6 est **un diviseur** de 54.

On notera une subtile différence de vocabulaire entre "le diviseur dans une division euclidienne" et "un diviseur d'un nombre".

Par exemple, dans la division euclidienne de 54 par 7, le reste est 5. Donc 7 n'est pas **un** diviseur de 54, mais 7 est **le** diviseur dans cette division euclidienne.

Si $54 = 6 \times 9$, on a aussi $54 = 9 \times 6$
54 est **divisible par** 9.
54 est un **multiple** de 9 et 9 est **un diviseur** de 54.
En général, dès que l'on connaît un diviseur, on en connaît deux.

I) <u>Deux propriétés importantes</u>

Propriété 1

Si A est multiple de B et B est un multiple de n, alors A est un multiple de n.

En effet, si A est un multiple de B, alors il existe un nombre k tel que $A = k \times B$ et si B est un multiple de n, alors il existe un nombre k' tel que $B = k' \times n$.
Alors $A = k \times B = (k \times k') \times n$

Par exemple :

Tous les multiples de 9 sont des multiples de 3 car 9 est un multiple de 3.

Et cela signifie également que si un nombre n'est pas multiple de 3, il ne peut pas être multiple de 6, de 9, … (d'aucun multiple de 3)

Tous les multiples de 10 sont des multiples de 2 et de 5.

$51 = 3 \times 17$ donc tous les multiples de 51 sont des multiples de 3 et de 17.

Ce qui ne signifie pas, bien entendu que tous les multiples de 3 sont des multiples de 51. Mais que si un nombre n'est pas multiple de 3, il ne peut pas être multiple de 51.

Propriété 2

Si A et B sont deux multiples de n, alors :
A + B est multiple de n ; A − B est multiple de n. (si A >B)

A étant un multiple de n, il existe un nombre entier k tel que A = k × n.
B étant un multiple de n, il existe un nombre entier k' tel que B = k' × n.
A + B = k × n + k' × n et A − B = k × n − k' × n
En application de la règle de distributivité :
A + B = (k + k') × n et A − B = (k − k') × n
Ce sont deux multiples de n.

Pour reconnaître un multiple d'un nombre n, il suffit souvent de lui soustraire des multiples simples de n.
Par exemple, pour savoir si 5 735 est un multiple de 7 :
On peut décomposer 5 735 = 5 000 + 700 + 35
700 et 35 sont des multiples simples de 7.
Poser la question « 5 735 est-il un multiple de 7 ? » est donc équivalent à poser la question « 5 000 est-il un multiple de 7 ? »
Et il est assez rapide de prouver que 5 000 n'est pas un multiple de 7.

II) Rappels de critères de divisibilité connus

- **Par 2** : le chiffre des unités est un nombre pair.

- **Par 4** : le nombre formé par les **deux derniers chiffres** est un multiple de 4.

Tout nombre de plus de deux chiffres pour être décomposé en deux nombres : un nombre de centaines et un nombre plus petit que 100.
Le nombre de centaines est toujours multiple de 4, car k × 100 = (k × 25) × 4.
Et la question porte donc sur ce qui reste quand on soustrait les centaines.

Par exemple 127 538 = (12 753 × 100) + 38
(12 753 × 100) est multiple de 4 mais 38 n'est pas multiple de 4 donc 127 538 n'est pas multiple de 4.

- **Par 5** : Le chiffre des unités est 0 ou 5.

- **Par 3 et par 9** : On calcule **la somme réduite** des nombres formés par chacun des chiffres jusqu'à obtenir un nombre d'un seul chiffre.
  - Si cette somme est 9, alors le nombre est un multiple de 9 (et donc de 3).
  - Si cette somme est 3 ou 6, le nombre est multiple de 3 mais pas de 9.

Par exemple :

1) Pour 53 283 : la somme réduite est : 5 + 3 + 2 + 8 + 3 = 21 ⟶ 2 + 1 = 3
Donc 53 283 est un multiple de 3 mais pas de 9.

2) Pour 106 272 : 1 + 0 + 6 + 2 + 7 + 2 = 18 ⟶ 1 + 8 = 9
Donc 106 272 est un multiple de 9 et de 3.

3) Pour 5 432 : 5 + 4 + 3 + 2 = 14 ⟶ 1 + 4 = 5
Donc 5 432 n'est pas un multiple de 3 et donc pas de 9.

III) <u>Divisibilité par 11</u>

Pour reconnaître un multiple de 11 : on classe les chiffres en deux catégories, les chiffres de rang impair (le premier, le troisième, le cinquième, etc.) et les chiffres de rang pair (le deuxième, le quatrième, etc.). On calcule les sommes des nombres formés par ces deux catégories de chiffres. On calcule enfin la différence de ces deux sommes. Si le résultat obtenu est un multiple de 11 (0 ou 11 ou 22, etc.), alors le nombre étudié est un multiple de 11.

Par exemple : 8 206

Chiffres de rang impair	8 et 0
Somme des chiffres de rang impair	8
Chiffres de rang pair	2 et 6
Somme des chiffres de rang pair	8
Différence des deux sommes	8 − 8 = 0

Conclusion : 8 206 est un multiple de 11

Autre exemple : 145 732

Chiffres de rang impair	1, 5 et 3
Somme des chiffres de rang impair	9
Chiffres de rang pair	4, 7 et 2
Somme des chiffres de rang pair	13
Différence des deux sommes	13 − 9 = 4

Conclusion 145 732 n'est pas un multiple de 11

IV) <u>D'autres critères de divisibilité</u>

On peut parfois combiner deux règles de divisibilité pour en établir de nouvelles.

- **<u>Par 6 :</u>**

6 est le produit de 2 et 3. Pour qu'un nombre soit un multiple de 6, il faut donc qu'il soit à la fois un multiple de 2 et un multiple de 3. On peut utiliser les deux règles de divisibilité par 2 et par 3 pour mettre au point une règle de divisibilité par 6 :
Si le chiffre des unités est un nombre pair et si la somme des nombres formés par chacun des chiffres est un multiple de 3, alors le nombre est un multiple de 6.

- **<u>Par 10</u>**

Le nombre doit être divisible par 2 et par 5. Le chiffre des unités ne peut être que 0 ou 5 et doit être un nombre pair. Ce ne peut donc être que 0.

- **<u>Par 15</u>**

Le nombre doit être divisible par 3 et par 5. Le chiffre des unités ne peut être que 0 ou 5 et la somme des nombres formés par chacun des chiffres doit être un multiple de 3.

- **<u>Par 18</u>**

Le nombre doit être divisible par 2 et par 9. Le chiffre des unités doit être un nombre pair et la somme des nombres formés par chacun des chiffres doit être un multiple de 9.

Exercices

a) Exercice 1

a) Dans la division euclidienne par 7, le reste est 3 et le quotient est 15. Quel est ce nombre?
b) Dans la division euclidienne par 5, le reste est 2 et le quotient est 23. De quel nombre s'agit-il?
c) Dans la division euclidienne par 9, le reste est 4 et le quotient est 8. De quel nombre s'agit-il?
d) Dans la division euclidienne par 6, le quotient est 13. Quels sont les nombres possibles? Donner les différentes possibilités.

b) Exercice 2

Recopier et compléter les égalités suivantes :

$25 \times \ldots\ldots = 425$	$18 \times \ldots\ldots = 126$
$42 = 2 \times \ldots\ldots = 6 \times \ldots\ldots = 14 \times \ldots\ldots$	$81 = 27 \times \ldots\ldots = 9 \times \ldots\ldots$
$48 = \ldots\ldots \times 4 = 16 \times \ldots\ldots$	$120 = \ldots\ldots \times 20$
$\ldots\ldots \times 13 = 741$	$56 = \ldots\ldots \times 4$

c) Exercice 3

a) Montrer que 5 346 et 486 sont deux multiples de 9.
b) Calculer à partir de ces deux nombres deux autres multiples de 9.

d) Exercice 4

Recopier et compléter les phrases suivantes avec les mots corrects :
a) 77 est un • de 7 et de 11.
b) 1, 2, et 4 sont les seuls • de 4.
c) 35 est • par 5 car 5 est le chiffre des unités.
d) Si a est • par b, alors b est un • de a et a est un • de b.

e) Exercice 5

Placer les nombres de 1 à 9 ou de 1 à 16 selon la taille du tableau.
En bout de ligne ou de colonne figure le produit des 3 ou 4 nombres de la ligne ou de la colonne.

			63
			120
			48
40	**126**	**72**	

				330
				2 268
				8 960
				3 120
1 638	**2 112**	**700**	**8 640**	

f) Exercice 6

a) Vérifier que : $39 \times 16 = 624$. En déduire, sans poser d'opération, que 4 et 13 sont des diviseurs de 624.
b) L'entier 13 est-il un diviseur de 26 013 ?
c) L'entier 12 est-il un diviseur de $(144 \times 10^5 - 240)$?

g) Exercice 7

Pour chaque nombre proposé, dire s'il est ou non multiple de 2, 3, 4, 6, 5, 9, 11, 12, 15 et 18. On pourra présenter les réponses en tableau

290	444	333	2 346	4 095	10 602

h) Exercice 8

Pour chaque nombre proposé, dire s'il est ou non multiple de 2, 3, 4, 6, 5, 9, 11, 12, 15 et 18. On pourra présenter les réponses en tableau

59 565	65 780	4 788	7 980	14 490

i) Exercice 9

Pour chaque nombre proposé, dire s'il est ou non multiple de 2, 3, 4, 6, 5, 9, 11, 12, 15 et 18. On pourra présenter les réponses en tableau

117 810	17 940	114 444	3 042	364
7 410	4 807	8 778	106 590	13 110

j) Exercice 10

1) Trouver la valeur du chiffre manquant représenté par un carré dans le nombre entier 1 42□ pour qu'il soit divisible par 3 et 5.

2) Avec les chiffres 1, 5 et 8, composer un nombre de trois chiffres divisible par 2 et par 7.

5) Quel est le plus grand entier divisible par 2, par 3 et par 5 dont l'écriture comporte exactement quatre chiffres tous différents ?

6) Quel est le plus petit entier divisible par 9, non divisible par 2, non divisible par 5, dont l'écriture comporte trois chiffres tous différents ?

7) Parmi les entiers : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, trouver ceux qui ont un ou plusieurs multiples s'écrivant uniquement avec le chiffre 1.

k) Exercice 11

Teddy Strai a laissé le code à 9 chiffres de son coffre à l'intérieur du coffre.
Il se souvient cependant que ce code ne contient pas de 0, que les chiffres sont tous différents, et qu'à partir de la gauche :
Le nombre formé des deux premiers chiffres est pair.
Le nombre formé des $2^{ème}$ et $3^{ème}$ chiffres est un multiple de 3.
Le nombre formé des $3^{ème}$ et $4^{ème}$ chiffres est un multiple de 4.
Le nombre formé des $4^{ème}$ et $5^{ème}$ chiffres est un multiple de 5.
Et ainsi de suite jusqu'au nombre formé par les $8^{ème}$ et $9^{ème}$ chiffres qui est un multiple de 9.
Avec ces renseignements, on trouve deux possibilités. Lesquelles?

l) Exercice 12

Divisibilité par 7 : La méthode et un exemple

On barre le chiffre des unités et on retire son double au nombre restant.
Le nouveau nombre obtenu est-il un multiple de 7?
Si oui, alors le nombre initial l'est aussi.
Si non, alors le nombre initial ne l'est pas non plus.
Si on ne sait pas conclure, on recommence avec ce nombre ce que l'on a fait précédemment.

40 901
4 090 – 2 = 4 088
On recommence :
408 – 16 = 392
On recommence :
39 – 4 = 35.
C'est un multiple de 7, donc 40 901 est un multiple de 7.

Une présentation pratique des calculs

Pour le nombre 678 047

	6	7	8	0	4	~~7~~
			–	1	4	
	6	7	7	~~9~~	~~0~~	
	–	1	8			
	6	5	~~9~~			
–	1	8				
	4	7				

47 n'est pas un multiple de 7, donc 678 047 non plus.

Pour des nombres de 3 chiffres

Le calcul peut se faire de tête :
301 : 30 – 2 = 28. Multiple de 7.
458 : 45 – 16 = 29 . Pas multiple de 7.
448 : 44 – 16 = 28. Multiple de 7.
622 : 62 – 4 = 58 . Pas multiple de 7.
973 : 97 – 6 = 91 9 – 2 = 7 . Multiple de 7.
419 : 41 – 18 = 23. Pas multiple de 7.

Exercer la méthode pour les nombres suivants :

54 635	689 160	4 223	877
137 361	150 150	122 796	2 499 994
655 489	19 502	44 821	31 400

Quel raccourci de méthode lorsque le nombre se termine par des 0?

La méthode est-elle vraiment utile pour des nombres comme :

735 147 756 2 128 147 70 063 ?

m) Exercice 13

Divisibilité par 13; La méthode et un exemple

On barre le chiffre des unités et on ajoute son **quadruple** au nombre restant.
Le nouveau nombre obtenu est-il un multiple de 13?
Si oui, alors le nombre initial l'est aussi.
Si non, alors le nombre initial ne l'est pas non plus.
Si on ne sait pas conclure, on recommence avec ce nombre ce que l'on a fait précédemment.

3 237
323 + 28 = 351
On recommence :
35 + 4 = 39
C'est un multiple de 13, donc 3 237 aussi.

Une présentation pratique des calculs

Pour le nombre 451 487

	4	5	1	4	8	~~7~~
			+	2	8	
	4	5	1	7	~~6~~	
		+	2	4		
	4	5	4	~~1~~		
		+	4			
	4	5	~~8~~			
+	3	2				
	7	7				

77 n'est pas un multiple de 13, donc 451 487 non plus.

Pour des nombres de 3 chiffres
Le calcul peut se faire de tête :
436 : 43 + 24 = 67. Pas multiple de 13.
458 : 45 + 32 = 77 . Pas multiple de 13.
312 : 31 + 8 = 39. Multiple de 13.
612 : 61 + 8 = 69 . Pas multiple de 13.
975 : 97 + 20 = 117 = 9 × 13 . Multiple de 13.
671 : 67+ 4 = 71. Pas multiple de 13.

Exercer la méthode pour les nombres suivants :

47 073	68 164	34 293	871
137 851	130 120	322 496	2 439 974
685 489	22 502	60 821	94 400

n) <u>Exercice 14</u>

Divisibilité par 17; La méthode et un exemple

On barre le chiffre des unités et on retire son **quintuple** au nombre restant.
Le nouveau nombre obtenu est-il un multiple de 17?
Si oui, alors le nombre initial l'est aussi.
Si non, alors le nombre initial ne l'est pas non plus.
Si on ne sait pas conclure, on recommence avec ce nombre ce que l'on a fait précédemment.

11 679
1 167 – 45 = 1 122
On recommence :
112 – 10 = 102
On recommence :
10 – 10 = 0.
C'est un multiple de 17, donc 11 679 est un multiple de 17.

Une présentation pratique des calculs.
Pour le nombre 956 090

	9	5	6	0	9	~~0~~
			–		0	
	9	5	6	0	~~9~~	
		–	4	5		
	9	5	1	~~5~~		
	–	2	5			
	9	2	~~6~~			
–	3	0				
	6	2				

62 n'est pas un multiple de 17, donc 956 090 non plus.

Pour des nombres de 3 chiffres
Le calcul peut se faire de tête :

657 : 65 – 35 = 30. Pas multiple de 17
272 : 27 – 10 = 17. Multiple de 17
578 : 57 – 40 = 17. Multiple de 17
972 : 97 – 10 = 87. Pas multiple de 17
Cela suppose de connaître la table des 17 jusqu'à 5 × 17

Exercer la méthode pour les nombres suivants :

54 635	689 146	4 216	867
134 361	158 150	322 706	4 499 989

o) Exercice 15

a) Calculer : 13 × 11 × 7
b) Montrer que 325 325 est un multiple de 325 ; En déduire, que 13, 77 et 143 sont des diviseurs de 325 325.
c) Proposer d'autres nombres de six chiffres divisibles par 13, 77 et 143.

$\overline{abcd}$ est l'écriture **décimale** du nombre : a × 1 000 + b × 100 + c × 10 + d × 1
d) Démontrer que 1 001 est un diviseur de tout entier du type : $\overline{abcabc}$
e) En déduire que 91 est un diviseur de tout entier du type : $\overline{abcabc}$

p) Exercice 16

1. Soit n un entier non nul. Donner une **écriture littérale** de l'entier «qui le suit», puis de l'entier «qui le précède».
2. **Démontrer** que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
3. La somme de quatre entiers consécutifs est-elle un multiple de 4 ?
4. La somme de cinq entiers consécutifs est-elle un multiple de 5 ?
5. Peut-on imaginer une généralisation ?

q) Exercice 17

Terminologie : Examiner **la parité** d'un nombre entier naturel, c'est déterminer s'il est pair ou impair.
1) Donner l'écriture littérale d'un nombre pair, puis celle d'un nombre impair.
2) Étudier la parité de la **somme** de deux entiers a et b (a > b) lorsque :
   - a et b sont tous les deux pairs ;
   - a et b sont tous les deux impairs ;
   - a est impair et b est pair.
3) Étudier la parité du **produit** de deux entiers a et b lorsque :
   - a et b sont tous les deux pairs ;
   - a et b sont tous les deux impairs ;
   - a est impair et b est pair.

r) Exercice 18

a) Quel est le chiffre des unités de chacun des nombres 3^1;3^2, 3^3; 3^4, 3^5, 3^6, 3^7?
b) Comment trouve-t-on le chiffre des unités de la puissance suivante (3^8) sans avoir besoin de calculer l'écriture décimale de ce nombre?
c) Quel est le chiffre des unités de 3^{50} ? de $3^{1\,000}$?
d) Quel est le chiffre des unités du nombre 9^{50} ?

2. Nombres premiers

Définition

On appelle **nombre premier** un nombre qui a exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

C'est à dire qu'un nombre qui a plus de deux diviseurs n'est pas premier. Par exemple, le nombre 8 est divisible par 1, 2, 4, et 8, donc ce n'est pas un nombre premier.

Le nombre 1 est un cas particulier : il est divisible par 1, il est divisible par lui-même, mais puisque c'est le même nombre il n'a donc qu'un seul diviseur. **Il n'est pas premier**.

De même **0 n'est pas un nombre premier** car on peut le diviser par tous les nombres autres que 0. Il a une infinité de diviseurs.

Dès qu'un nombre est multiple d'un autre, il ne peut pas être premier.
Par exemple, 24 est un multiple de 6 (entre autres), il est donc divisible par 6, il n'est pas premier.

Le mot "**premier**" est utilisé pour signifier qu'il est le premier d'une liste de multiples.
Et qu'à partir de ces **nombres premiers**, on peut reconstituer (par la liste de leurs multiples) la suite de tous les nombres entiers. (en y ajoutant les nombres 0 et 1 qui ne sont pas premiers).
Voyons ce que cela donne pour le nombre inférieurs à 100 :
Commençons par le premier nombre premier : 2 et dressons la liste de ces multiples :

0	1	❷	4	6	8	
10		12	14	16	18	
20		22	24	26	28	
30		32	34	36	38	
40		42	44	46	48	
50		52	54	56	58	
60		62	64	66	68	
70		72	74	76	78	
80		82	84	86	88	
90		92	94	96	98	etc.

Le nombre suivant (c'est 3) est un nombre premier; ajoutons la liste de ces multiples.

0	1	❷	❸	4		6		8	9
10		12		14	15	16		18	
20	21	22		24		26	27	28	
30		32	33	34		36		38	39
40		42		44	45	46		48	
50	51	52		54		56	57	58	
60		62	63	64		66		68	69
70		72		74	75	76		78	
80	81	82		84		86	87	88	
90		92	93	94		96		98	99

Le nombre suivant (c'est 5) est un nombre premier; ajoutons la liste de ces multiples.
Beaucoup de ces multiples figurent déjà dans le liste.
Le premier que l'on ajoute est le nombre 25 (5×5, le carré de 5).

0	1	❷	❸	4	❺	6		8	9
10		12		14	15	16		18	
20	21	22		24	25	26	27	28	
30		32	33	34	35	36		38	39
40		42		44	45	46		48	
50	51	52		54	55	56	57	58	
60		62	63	64	65	66		68	69
70		72		74	75	76		78	
80	81	82		84	85	86	87	88	
90		92	93	94	95	96		98	99

Le nombre suivant (c'est 7) est un nombre premier; ses 6 premiers multiples figurent déjà dans la liste car ils sont multiples de 6 entiers qui le précèdent.
Le premier que l'on ajoute est le nombre 49 (7×7, le carré de 7).

0	1	❷	❸	4	❺	6	❼	8	9
10		12		14	15	16		18	
20	21	22		24	25	26	27	28	
30		32	33	34	35	36		38	39
40		42		44	45	46		48	49
50	51	52		54	55	56	57	58	
60		62	63	64	65	66		68	69
70		72		74	75	76	77	78	
80	81	82		84	85	86	87	88	
90	91	92	93	94	95	96		98	99

Le nombre suivant (c'est 11) est un nombre premier; ses 10 premiers multiples figurent déjà dans la liste.
Le premier que l'on pourrait ajouter à la liste est son carré $121 = 11 \times 11$, mais il est plus grand que 100.
On comprend donc que les cases vides ne contiennent plus que des **nombres premiers**.
13 - 17 - 19 - 23 - 29 - 31 - 37 - 41 - 43 - 47 - 53 - 59 - 61 - 67 - 71 - 73 - 79 - 83 - 89 - 97.

I) <u>Autre recherche des nombres premiers</u>

On aurait pu procéder à l'inverse : dans un tableau, on place tous les entiers inférieurs à 100.

On a vu que 0 et 1 ne sont pas premiers. Rayons-les. Ensuite apparaît 2. Il est divisible par 1 et 2. Il est premier, je le conserve.

Je sais que tous les multiples de 2 ne sont pas premiers car 2 est un de leurs diviseurs. Je les raye tous. Puis je m'intéresse au nombre suivant 3. Il est premier car il n'a pas encore été rayé. Je conserve et je raye tous ses multiples. Et je passe au suivant 5, je raye tous ses multiples et ainsi de suite pour l'ensemble du tableau. Et ainsi de suite.

On pourrait continuer ainsi très longtemps, on trouverait des nombres premiers de temps en temps. Il n'y a pas de règle particulière pour prévoir qu'un nombre sera ou non premier. Le seul moyen de le savoir est de rechercher ses éventuels diviseurs.

II) <u>Déterminer si un nombre est ou non premier :</u>

Tout nombre qui n'est pas premier est multiple d'au moins un nombre premier.
Donc, si un nombre n'a pas de diviseur premier, c'est un nombre premier.

3 233 est-il un nombre premier ? Cherchons parmi les nombres premiers, les diviseurs possibles de 3 233

En appliquant les critères de divisibilité, on constate que 3 233 n'est pas divisible par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, ni par 11.

Tentons maintenant de diviser 3 233 par 13. Le quotient n'est pas entier. Il vaut un peu plus que 248. Ce que nous écrirons q ≈ 248,…

Si on divise 3 233	par	le quotient
	17	≈ 190,…
	19	≈ 170,…
	23	≈ 140,…
	29	≈ 111,…
	31	≈ 104,…
	37	≈ 87,…
	41	≈ 78,…
	43	≈ 75,…
	47	≈ 68,…
	53	= 61

3 233 n'est donc pas un nombre premier : 3 233 = 53 × 61.

673 est-il un nombre premier ? Cherchons parmi les nombres premiers, les diviseurs possibles de 673

En appliquant les critères de divisibilité, on constate que 673 n'est pas divisible par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, ni par 11.

Tentons maintenant de diviser 673 par 13. Le quotient n'est pas entier.

Si on divise 673	par	le quotient
	13	≈ 51,…
	17	≈ 39,…
	19	≈ 35,…
	23	≈ 29,…
	29	≈ 23,…

On peut s'arrêter lorsque le quotient est inférieur au diviseur, car pour une valeur supérieure à 29, le quotient est inférieur à 23.
Si l'on trouvait un diviseur supérieur à 29, on en aurait un autre (le quotient) qui, lui, serait inférieur à 23. Ce qui est impossible car on les a tous essayés.
On en conclut que **673 est un nombre premier**.

III) Décomposition en produit de facteurs premiers

Terminologie : Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers, c'est l'écrire sous la forme d'un produit non effectué dans lequel tous les facteurs sont des nombres premiers.
Exemple :
La décomposition du nombre 54 en produit de facteurs premiers est 2 × 3 × 3 × 3

Méthode de recherche de la décomposition en produit de facteurs premiers:
On doit avoir en tête la liste des nombres premiers par ordre croissant : 2, 3, 5, 7, 11, ….
On utilise souvent une présentation en colonne qui est pratique, qu'il ne faut pas confondre avec un calcul de quotient habituel parce qu'elle utilise des quotients, mais il n'y a pas de reste dans tous ces problèmes de diviseurs.

Exemple : La décomposition du nombre 770 en produit de facteurs premiers:

	ce nombre	est divisible par:
	770	2
et le quotient est:	385	5
	77	7
	11	11
	1	

- 2 est un diviseur de 770, donc on calcule le quotient (385), que l'on reporte sous 770.
- 385 n'est pas divisible par 2, on passe au nombre premier suivant, qui est 3. Mais 385 n'est pas divisible par 3. On passe au nombre premier suivant qui est 5.
- On calcule le quotient de 385 par 5 (77), que l'on reporte sous 385.
- 77 n'est pas divisible par 5. On passe au nombre premier suivant qui est 7.
- On calcule le quotient de 77 par 7 (11), que l'on reporte sous 77.
- 11 est un nombre premier, il n'est plus divisible que par lui-même.
- On obtient dans la colonne de droite tous les facteurs de la décomposition du nombre 770 en produit de facteurs premiers.
- On peut donc écrire : $\mathbf{770 = 2 \times 5 \times 7 \times 11}$

La décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers est toujours unique.
On veillera à bien écrire tous les facteurs dans l'ordre croissant.

Exercices

s) Exercice 19

Décomposer tous les nombres non premiers de 4 à 50.

t) Exercice 20

Pour bien des nombres, la méthode présentée pour la décomposition est un peu longue et pas toujours utile.
On peut procéder par étapes en se servant des tables de multiplication et des critères de divisibilité.
Exemple Décomposition du nombre 52 en produit de facteurs premiers:
On sait que 52 est divisible par 2. On a donc $52 = 2 \times 26$
On sait que 26 est divisible par 2. On a donc $52 = 2 \times 2 \times 13$. Et ainsi on a obtenu la décomposition.
De cette manière décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers:

62	38	196	963	555	432
1 515	666	884	270	531	4 477

u) Exercice 21

Les produits ne sont pas à calculer. Ils ne contiennent pas que des facteurs premiers. Il faut donc les exprimer tous sous la forme de produits de facteurs premiers.
On rangera les facteurs dans l'ordre croissant.

$5 \times 18 \times 25$ $\quad$ $12 \times 6 \times 14$ $\quad$ $25 \times 36 \times 2 \times 9$ $\quad$ $81 \times 49 \times 54$

v) Exercice 22

En utilisant la méthode, décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers.

616	825	624	594	1 705	10 404
72 215	8 232	9 555	3 145	92 274	12 493

w) Exercice 23

Montrer, sans les effectuer, que les produits A et B suivants sont égaux :
$A = 4 \times 15 \times 35$; $B = 14 \times 25 \times 6$

x) Exercice 24

On considère le produit P des six premiers nombres premiers :
$P = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$
Montrer que les douze nombres consécutifs
$P + 2$; $P + 3$; $P + 4$; $P + 5$; $P + 6$; $P + 7$; $P + 8$; $P + 9$; $P + 10$; $P + 11$; $P + 12$ et $P + 13$ ne sont pas des nombres premiers.