

Extrait de cours de maths de 6e

Chapitre 1 : Les nombres et les opérations

1.1 La numération décimale

I) Chiffre et nombre

En mathématique, un chiffre est un signe utilisé pour l'écriture des nombres. Dans le langage courant, on utilise parfois le mot "chiffre" à la place du mot "nombre". On entend souvent dire : "les chiffres du loto" ou encore "les chiffres du chômage", alors qu'il s'agit de nombres dans ces cas-là. Il faut accepter l'idée que l'on ne parle pas exactement dans la vie de tous les jours comme en mathématiques.

Pour écrire les nombres, on utilise dix chiffres. C'est pourquoi l'on parle de **système décimal**¹.

Ces chiffres sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, et 9.

Avec ces chiffres, on construit des **nombres** qui utilisent un ou plusieurs chiffres.

Le nombre 435 s'écrit avec trois chiffres.

Le nombre 5 s'écrit avec un seul chiffre.

On pense parfois à tort que les nombres ne commencent qu'à 10 (quand ils ont au moins deux chiffres). C'est une erreur.

Le chiffre est le signe, le nombre est la valeur.

Si l'on peut comparer, c'est comme avec les **lettres et les mots**. Notre alphabet comporte vingt-six lettres avec lesquelles nous formons des mots. Il y a des mots qui ne sont formés que d'une seule lettre. Par exemple, dans la phrase précédente, "y" et "a" sont des mots qui ne comportent qu'une seule lettre.

La valeur représentée par un chiffre dépend de sa **position** dans l'écriture du nombre.

Dans le nombre 838,78, le premier 8 est le chiffre des centaines et représente le nombre 800. Le deuxième 8 est le chiffre des unités et représente le nombre 8, le troisième 8 est le chiffre des centièmes et représente le nombre 0,08.

II) Chiffre des ; nombre de

Il est essentiel de bien connaître la distinction entre (par exemple pour 147 906) :

Le **chiffre des centaines** est 9 (c'est le signe écrit à la position des centaines simples).

Le **nombre de centaines** qui est 1 479, car 147 906 est égal à 1 479 centaines et 6 unités.

¹ Deci signifie dix en latin

III) Ordres et classes

La valeur associée à un chiffre dépend de la position de ce chiffre dans l'écriture du nombre.

Chaque chiffre tient la place d'une unité dont le nom change avec la place, et que l'on appelle l'**ordre**.

Un nombre s'écrit par tranches de trois chiffres (en partant des unités simples) que l'on appelle les **classes**.

Chaque classe comprend donc trois ordres : les unités, les dizaines et les centaines.

Unités de milliards	Classe des millions			Classe des mille			Classe des unités simples		
	Centaines	Dizaines	Unités	Centaines	Dizaines	Unités	Centaines	Dizaines	Unités
			5	0	2	8	5	7	3
9	5	2	0	1	0	0	6	7	9

Ces deux nombres se lisent en les partageant en tranches de trois chiffres en commençant par la droite; puis on lit, en commençant par la gauche chaque tranche que l'on fait suivre de son nom de classe.

5 028 573 : 5 millions 28 mille 573 unités.

9 520 100 679 : 9 milliards 520 millions 100 mille 679 unités.

IV) Vocabulaire

Tout nombre dont on peut donner une écriture complète au moyen des dix chiffres du système décimal est appelé **nombre décimal**.

Certains nombres décimaux nécessitent l'utilisation d'une virgule.

Les nombres décimaux qui n'utilisent pas de virgule sont appelés des **nombres entiers**.

On appelle nombre **pair** un nombre entier se terminant par 0, 2, 4, 6 ou 8.

Un nombre **impair** se termine lui par 1, 3, 5, 7 ou 9.

On dit que des nombres entiers sont **consécutifs** lorsqu'ils se suivent de 1 en 1.

Par exemple : 56 et 57 sont deux entiers consécutifs.

102, 103 et 104 sont trois entiers consécutifs.

Exercices

Exercice 1

Écrire avec des mots les nombres suivants:

7 218 10 120 448 80 388 10 101

Exercice 2

Donner l'écriture décimale des nombres :

Trois mille douze

Cinq cent deux mille

Un milliard

Trente deux mille neuf cent sept.

Exercice 3

Donner le chiffre des dizaines des nombres suivants :

8 693 111 4 404 21

Combien y a-t-il de dizaines dans ?

18 643 630 47 857 973

Exercice 4

Combien y a-t-il de dizaines dans 90 082 ?

Combien de centaines dans 950 272?

Combien de mille dans 10 208 ?

Exercice 5

Pour chacun des nombres suivants indiquer le chiffre des centaines, puis le nombre de dizaines : 6 342 ; 4 225 ; 347 ; 15 405 ; 18 025

Exercice 6

Quels sont les nombres de trois chiffres différents que l'on peut écrire avec les trois chiffres : 6 ; 2 et 5

Exercice 7

Quelle est l'écriture décimale des nombres donnés en écriture romaine :

DLXII MCMXCVIII MCCLIV

Écrire en écriture romaine les nombres suivants : 354 ; 912 ; 2672

Exercice 8

Un livre contient 256 pages. On veut numéroter toutes les pages.

Combien de fois utilisera-t-on le chiffre 4?



1.2 Les signes de comparaison

I) L'égalité

Le signe d'égalité : = sépare deux expressions qui ont la même valeur mais (en général) des écritures ou des présentations différentes.

Par exemple : $6 \times 7 = 42$ que l'on lit « six fois sept **égale** quarante-deux » ou bien « six fois sept **est égal à** quarante-deux » et que l'on pourrait encore lire : « six fois sept **et** quarante-deux **sont égaux** »

L'écriture $6 \times 7 = 42$ est une **égalité**.

6×7 est appelé le **premier membre** de l'égalité. 42 est le **second membre** de l'égalité.

Une égalité peut et doit être lue dans les deux sens.

$6 \times 7 = 42$: en lisant ainsi, on effectue le calcul du produit.

$42 = 6 \times 7$: en lisant ainsi, on décompose 42 en deux facteurs.

Opérations successives

Deux quantités séparées par un signe d'égalité sont deux quantités de même valeur.

On ne peut pas écrire les égalités suivantes, même si le résultat final du calcul est correct : $12 + 58 + 68 + 32 = 70 + 68 = 138 + 32 = 170$

En effet, $70 + 68$ n'est pas égal aux autres quantités proposées.

Si l'on veut montrer que l'on effectue ce calcul par étapes, on écrira :

$12 + 58 + 68 + 32 = 70 + 68 + 32 = 138 + 32 = 170$.

Ou encore :

$12 + 58 + 68 + 32 =$ C'est à dire que l'on reproduira ce qui n'a pas été modifié d'une
 $70 + 68 + 32 =$ étape à la suivante.
 $138 + 32 =$
 170

II) Les valeurs approchées

Pour marquer que deux quantités ne sont pas égales, on utilise le signe \neq .

Par exemple : $3 \times 7 \neq 20$

Mais pour indiquer que des valeurs sont très proches, on utilise le signe \approx .

Par exemple : $47 \div 9 \approx 5,22$

III) Les signes de comparaison

Il y a plusieurs manières d'ordonner des nombres : du plus petit au plus grand (ordre **croissant**) ou du plus grand au plus petit (ordre **décroissant**). On utilise alors pour cela les signes $<$, $>$, \geq , \leq .

$6 < 13$ se lit « 6 est **plus petit que** 13 » ou « 6 est **inférieur** à 13 »

$9 > 8$ se lit « 9 est **plus grand que** 8 » ou « 9 est **supérieur** à 8 ».

Les deux autres signes sont utilisés lorsqu'il s'agit de décrire une liste de nombres, afin d'y inclure le nombre de fin de liste (le plus petit ou le plus grand)

Exemple :

$n \leq 5$ (n est inférieur ou égal à 5) désigne tous les nombres plus petits que 5 (5 inclus).

$n \geq 12$ (n est supérieur ou égal à 12) désigne tous les nombres plus grands que 12, en commençant à 12.

Exercices

Exercice 9

Reprendre les calculs suivants qui sont mal présentés et en donner une présentation qui respecte une utilisation correcte du signe = :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 3 + 3 = 6 + 4 = 10 + 5 = 15 + 6 = 21 + 7 = 28$$

$$18 + 25 + 31 = 43 = 74$$

$$3 \times 5 \times 7 = 15 = 105$$

$$618 - 9 = 618 - 10 = 608 + 1 = 609$$

$$57 - 12 - 30 + 7 = 45 - 30 = 15 + 7 = 22$$

Exercice 10

Classer les nombres suivants par ordre **croissant**

12 ; 721 ; 0 ; 46 ; 1 002 ; 102 ; 201 ; 1 020 ; 1 202 ; 2 001

Exercice 11

Dresser la liste croissante des nombres entiers qui sont à la fois strictement² supérieurs à 7 et inférieurs ou égaux à 15

Exercice 12

Classer les nombres suivants par ordre **décroissant**

180; 205; 250; 32; 560; 241; 28; 034; 620; 602

Exercice 13

Dresser la liste décroissante des nombres entiers qui sont compris entre 19 et 30, strictement.

Exercice 14

Dresser la liste par ordre croissant de tous les nombres inférieurs à 1 000 que l'on peut écrire en utilisant au plus une fois l'un au moins des chiffres 3, 7 et 2.

Par exemple : 72 : on a utilisé au moins un des chiffres (on en a utilisé deux : 7 et 2); on ne les a pas utilisés plus d'une fois.



² Strictement : qui n'est pas égal à .

1.3 Les quatre opérations

Les opérations sont groupées en deux catégories :

Addition et soustraction

Multiplication et division

L'addition et la multiplication sont les opérations principales.

La soustraction découle directement de l'addition (quel nombre faut-il ajouter à ... pour obtenir ... ?)

La division découle de la multiplication (Dans ... combien de fois ... ?)

I) Addition et soustraction

Dans l'écriture $3 + 8 = 11$,

l'addition est symbolisée par le **signe +** de l'opération.

$3 + 8$ est l'écriture de **la somme** (non effectuée) des deux nombres 3 et 8.

La valeur de la **somme effectuée** est 11.

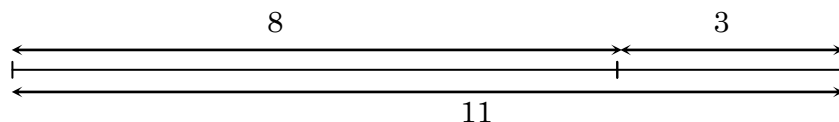
Les deux nombres 3 et 8 sont appelés **les termes de la somme**.

De l'opération précédente découlent **deux soustractions** :

$3 + 8 = 11$, alors $11 - 3 = 8$ 8 est la **différence** entre 11 et 3.

$11 - 8 = 3$ 3 est la **différence** entre 11 et 8.

Schématisation



II) Multiplication et division

Dans une écriture du type $5 \times 7 = 35$,

la multiplication est symbolisée par le **signe \times** de l'opération.

5×7 est l'écriture du **produit** (non effectué) des deux nombres 5 et 7.

La valeur du **produit effectué** est 35.

Les deux nombres 5 et 7 sont appelés **les facteurs du produit**.

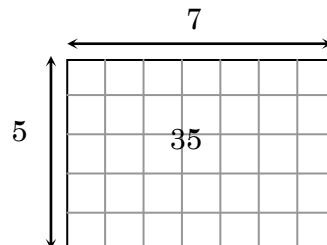
De l'opération précédente découlent deux divisions :

$5 \times 7 = 35$ alors $35 \div 5 = 7$ 7 est le **quotient** de 35 par 5.

$35 \div 7 = 5$ 5 est le **quotient** de 35 par 7.

Il est nécessaire de s'habituer à l'utilisation correcte des mots suivants :
somme, terme, produit, facteur, quotient, différence

Schématisation



Exercices

Exercice 15

Recopier et compléter les phrases suivantes avec les mots corrects :

1. 8 est la des deux nombres 3 et 5.
2. 9×7 est un de deux
3. La somme $4 + 8 + 16 + 7$ est composée de quatre
4. Laentre 12 et 5 n'est pas identique à la entre 13 et 7.
5. Dans lede 16 par 4, 16 s'appelle le dividende.

Exercice 16

Écrire les expressions suivantes et les calculer :

1. Quotient de 15 520 par 40
2. produit des nombres 3, 7 et 68
3. Différence entre 108 et 47
4. Somme du produit de 5 par 9 et de 17

Exercice 17

Poser et effectuer les calculs suivants :

$124\ 907 + 97\ 685 + 8\ 075$	$83\ 143 + 26\ 139 + 71\ 921 + 5\ 487$	
$99\ 384 + 2\ 456 + 16\ 748 + 419\ 976$	$727 + 8\ 977 + 973\ 281 + 7\ 658$	
$63\ 875 - 23\ 696$	$35\ 942 - 19\ 875$	$27\ 159 - 18\ 467$

Exercice 18

Poser et effectuer les calculs suivants :

$89\ 725 \times 670$	$54\ 092 \times 980$	$75\ 304 \times 750$
$25\ 678 \div 74$	$565\ 848 \div 87$	$234\ 764 \div 76$

Exercice 19

Traduire chaque phrase par une écriture mathématique :

Le produit de 5 par 9 est égal au produit de 9 par 5.

Le produit de 12 par la somme de 9 et 13 est égal à la somme des produits de 12 par 9 et de 12 par 13.

Exercice 20

Traduire chaque écriture mathématique par une phrase.

$$583 \times 19 \approx 11\ 600$$

$$43 \times 17 \neq 47 \times 13$$

$$46 \div 23 = 26 \div 13$$



1.4 Propriétés de l'addition et de la soustraction

I) Dans une somme

L'ordre des termes ne modifie pas la valeur d'une somme:

$8 + 25 = 25 + 8 = 33$. On dit que l'addition est commutative.

Il est utile de rechercher des groupements simples :

$24 + 13 + 16 + 7 = (24 + 16) + (13 + 7) = 40 + 20 = 60$. On dit que l'addition est associative

II) Dans une différence

La soustraction n'est pas commutative : $17 - 9 = 8$, mais $9 - 17 \neq 8$.

La soustraction n'est pas associative : $125 - 17 - 4 - 8 \neq (125 - 17) - (4 - 8)$.

Dans une suite de soustractions comme $125 - 17 - 4 - 8$, il faut soustraire les nombres **dans l'ordre de leur écriture** de gauche à droite.

$$125 - 17 - 4 - 8 = 108 - 4 - 8 = 104 - 8 = 96$$

Soustraire plusieurs nombres est équivalent à soustraire leur somme.

$$125 - 17 - 4 - 8 = 125 - (17 + 4 + 8) = 125 - 29 = 96$$

Si on ajoute un même nombre aux deux termes d'une différence, cette différence est inchangée.

$$59 - 34 = (59 + 1) - (34 + 1) = 60 - 35 = 25$$

$$126 - 87 = (126 + 3) - (87 + 3) = 129 - 90 = 39$$

Si on soustrait un même nombre aux deux termes d'une différence, cette différence est inchangée.

$$63 - 38 = (63 - 3) - (38 - 3) = 60 - 35 = 25$$

$$141 - 76 = (141 - 1) - (76 - 1) = 140 - 75 = 65$$

III) Utilisation de parenthèses.

On utilise des parenthèses pour regrouper (on dit associer) les termes d'une somme ou d'une différence et ainsi montrer la manière de faire le calcul. Ces parenthèses donnent la **priorité** aux calculs qui y figurent. C'est à dire qu'ils sont à effectuer avant ceux qui ne sont pas regroupés dans des parenthèses.

Dans les additions, les parenthèses ne modifient en rien la valeur de la somme; elles n'ont d'utilité que pour l'organisation : si on veut insister, par exemple, sur certaines étapes du calcul.

Exercices

Exercice 21

Calculer les sommes suivantes en cherchant des groupements intéressants

$$a = 438 + 247 + 62$$

$$b = 24 + 13 + 16 + 7$$

$$c = 123 + 45 + 27 + 14 + 5 + 36$$

$$d = 37 + 56 + 121 + 44 + 79 + 63$$

Exercice 22

Mener ces calculs en respectant les modèles de la leçon:

$$a = 45 + (27 + 57) + (157 + 92 + 76)$$

$$b = (47 + 521) + (64 + 942 + 87) + 66$$

$$c = 10 + (54 + 743) + (624 + 973 + 67)$$

Exercice 23

Effectuer en ligne

1	2	3	4
$a = 978 - 435$	$a = 796 - 342$	$a = 915 - 640$	$a = 6\,541 - 5\,078$
$b = 659 - 536$	$b = 856 - 554$	$b = 845 - 671$	$b = 5\,304 - 3\,936$
$c = 789 - 551$	$c = 935 - 471$	$c = 628 - 582$	$c = 7\,604 - 5\,948$
$d = 967 - 421$	$d = 637 - 382$	$d = 912 - 761$	$d = 4\,310 - 3\,928$
$e = 875 - 412$	$e = 528 - 473$	$e = 8\,062 - 3\,575$	$e = 8\,045 - 7\,806$

Exercice 24

Regrouper tous les nombres à soustraire pour ne plus avoir qu'une seule soustraction :

$$a = 1\,875 - 65 - 857 - 352$$

$$b = 624 - 67 - 8 - 512$$

$$c = 3\,210 - 87 - 95 - 875 - 1\,215 - 637$$

Exercice 25

En ajoutant le même nombre aux deux termes de la différence, faire apparaître des différences plus simples à calculer.

$$a = 487 - 39$$

$$b = 638 - 549$$

$$c = 30\,242 - 6\,654$$

$$d = 9\,661 - 548$$

Exercice 26

En soustrayant le même nombre aux deux termes de la différence, faire apparaître des différences plus simples à calculer.

$$a = 453 - 68$$

$$b = 672 - 98$$

$$c = 967 - 129$$

$$d = 3\,248 - 635$$



1.5 Propriétés de la multiplication

La multiplication est une opération qui permet de résumer, d'écrire plus simplement une suite d'additions pour laquelle tous les termes sont identiques.

$$12 \text{ cl} + 12 \text{ cl} + 12 \text{ cl} + 12 \text{ cl} = 12 \text{ cl} \times 4$$

12 cl est le **multiplicande**. 4 est le **multiplicateur**.

La somme : $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ contient le même terme 5 répété neuf fois.

On la remplace par l'écriture plus courte 5×9 que l'on lit « neuf fois cinq », ou bien « cinq multiplié par neuf ».

9×5 est le produit non effectué de 9 et 5

45 est le produit effectué de 9 et 5

9 et 5 sont les facteurs du produit

On peut modifier l'ordre d'écriture des facteurs sans modifier la valeur du produit. On dit que la multiplication est **commutative**.

$$12 \text{ cl} \times 4 = 4 \times 12 \text{ cl} \quad 9 \times 5 = 5 \times 9 = 45$$

Dans un produit de trois facteurs ou plus, on peut regrouper (associer) les facteurs sans se soucier de l'ordre de l'écriture. On dit que la multiplication est **associative**. Ce qui permet de mener les calculs des produits en recherchant ce qui semble le plus simple.

$$25 \times 7 \times 4 \times 9 = (25 \times 4) \times (7 \times 9) = 100 \times 63 = 6\,300.$$

Un produit de deux facteurs est invariant (ne change pas de valeur) si l'un des facteurs est multiplié pendant que l'autre facteur est divisé par le même nombre.

$$48 \times 35 = (48 \div 2) \times (35 \times 2) = 24 \times 70$$

La connaissance parfaite des tables de multiplication est indispensable pour permettre une certaine aisance dans tous les problèmes de mathématiques.

Connaître par cœur les tables, cela consiste à pouvoir dire sans réfléchir :

$$7 \times 8 = 56 \text{ ou } 56 \div 8 = 7 \text{ ou } 56 \div 7 = 8$$

mais aussi : $42 = 6 \times 7$ ou 53 n'est pas un produit dans la table.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150

Pour multiplier par des nombres tels que 10, 100, 1 000, 10 000, etc.(que l'on appelle des puissances de 10), on ajoute à droite du nombre autant de zéros qu'en compte le facteur.

$$624 \times 100 = 62\,400 \quad 4\,200 \times 1\,000 = 4\,200\,000$$

Penser à conserver au produit une écriture traditionnelle avec un espace tous les trois chiffres, ce qui permet une lecture facile.

Exercices

Exercice 27

a) Écrire chacun de ces nombres sous la forme d'un **produit de deux facteurs** (donner dans chaque cas toutes les possibilités) :

12 30 45 62 78 104 1035

b) Écrire chacun de ces nombres sous la forme d'un **produit de trois facteurs** (donner dans chaque cas toutes les possibilités) :

12 30 45 80 1001 616

Exercice 28

Effectuer les produits suivants en faisant apparaître les regroupements qui permettent des calculs très simples.

$$a = 2 \times 39 \times 5$$

$$b = 8 \times 125 \times 3$$

$$c = 25 \times 58 \times 4$$

$$d = 4 \times 6 \times 5 \times 3 \times 25 \times 2$$

$$e = 4 \times 6 \times 5 \times 2 \times 8 \times 25 \times 7 \times 125$$

$$f = 45 \times 4 \times 25 \times 6 \times 2 \times 5$$

Exercice 29

Calculer les produits suivants sans poser les opérations :

$$47 \times 10$$

$$23 \times 100$$

$$95 \times 1\,000$$

$$27 \times 10$$

$$52 \times 100$$

$$87 \times 1\,000$$

$$106 \times 10$$

$$251 \times 100$$

$$139 \times 1\,000$$

$$67 \times 10$$

$$342 \times 100$$

$$609 \times 10$$

Exercice 30

Calculer les produits suivants sans poser les opérations :

$$47 \times 20$$

$$23 \times 200$$

$$95 \times 2\,000$$

$$27 \times 40$$

$$52 \times 400$$

$$87 \times 4\,000$$

$$106 \times 80$$

$$251 \times 800$$

$$139 \times 8\,000$$

$$67 \times 50$$

$$342 \times 500$$

$$609 \times 50$$

Exercice 31

$12 \times 17 = 6 \times 34$ (12 est divisé par 2 pendant que 17 est multiplié par 2).

De la même manière : $12 \times 17 = 4 \times 51 = 3 \times 68 = 2 \times 102$

Sur ce principe, écrire tous les produits égaux à :

$$a = 25 \times 31$$

$$b = 13 \times 64$$

$$c = 14 \times 18$$

$$d = 21 \times 35$$

