Second degré – Équations et inéquations

❋❋✵❋❋

1ère leçon –Trinôme et signe du trinôme

I - Trinôme

Propriété

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, un trinôme du second degré, où a, b, c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.
Le discriminant Δ de ce trinôme est le réel $b^2 - 4ac$.

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Discriminant Δ	Equation $P(x) = 0$	Signe du trinôme $P(x)$	Forme factorisée éventuelle de $P(x)$
Si $\Delta < 0$	Aucune solution dans ρ	$P(x)$ est du signe de a pour tout réel x.	Pas de factorisation avec des facteurs du 1er degré
Si $\Delta = 0$	Une seule solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$	$P(x)$ est du signe de a pour tout réel x. De plus, $P(x_0) = 0$	$P(x)= a\,(x - x_0)^2$
Si $\Delta > 0$	Deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$P(x)$ est du signe de a sauf dans l'intervalle entre les racines x_1 et x_2. De plus, $P(x_1) = P(x_2) = 0$	$P(x) = a\,(x - x_1)(\,x - x_2)$

Remarque : La représentation graphique d'une fonction du second degré est une parabole.
Le sommet de cette parabole a pour coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}\,;\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$

La fonction trinôme admet un extremum atteint en $-\frac{b}{2a}$

. Si $a > 0$, cet extremum est un minimum
. Si $a < 0$, cet extremum est un maximum

II – Signe du trinôme – Tableau de signes

1. Si un trinôme vous est donné sous forme factorisée, il n'est pas utile de le développer pour en déterminer le signe.

Exemple *:* $P(x) = (2 - x)(x - 3)$ est un trinôme de second degré dont les racines sont 2 et 3.

Le signe de $P(x)$ est donc donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$P(x)$		-	0	+	0	-	

(Le coefficient de x^2 est -1 donc < 0)

2. Vous pourrez également utiliser ce résultat pour déterminer le signe d'une fraction rationnelle.

Exemple : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ est définie sur ρ - {-3}

$f(x)$ a le même signe que $(2x - 1)(x + 3)$ sur cet ensemble.

Donc le signe de $f(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		+	‖	-	0	+	

Exercices non à soumettre

Exercice 6

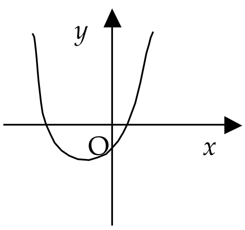
Donnez suivant les valeurs de x le signe de $P(x)$ dans chacun des cas suivants, après avoir factorisé, lorsque c'est possible.

1.$P(x) = x^2 - 3x - 4$
2.$P(x) = 2x^2 + 5x - 7$
3.$P(x) = -x^2 + x + 2$
4.$P(x) = x^2 + x + 1$
5.$P(x) = 2x^2 + 4x + 2$
6.$P(x) = -x^2 + x - 7$

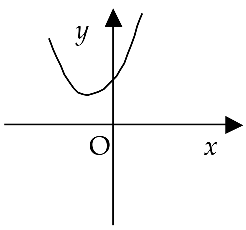
Exercice 7

Après avoir calculé le discriminant des trois trinômes suivants, attribuez à chacun le graphe de la fonction qu'il définit.

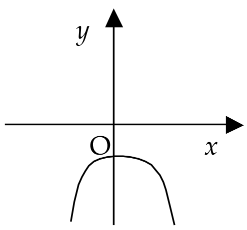
$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ $g(x) = 2x^2 + x + 3$ $h(x) = -x^2 + 4x - 5$



①



②



③

(Les unités ont été volontairement omises)

Exercice 8

Résolvez le système d'inconnue x.

$$\begin{cases} 3x^2 - 5x + 1 > 0 \\ 2x^2 + x - 1 < 0 \end{cases}$$

$2^{ème}$leçon –Résolution d'équations et d'inéquations

I - Équations

Exemple traité

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

1. Calculez P(1)

2. Déduisez-en une factorisation de $P(x)$

3. Résolvez dans R l'équation $P(x) = 0$

Réponses

1. $P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 5 \times 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$

2. Puisque $P(1) = 0$, on peut mettre $(x - 1)$ en facteur dans $P(x)$.
$P(x) = (x - 1)(x^2 + ax + b) = x^3 + ax^2 + bx - x^2 - ax - b = x^3 + x^2(a - 1) + x(b - a) - b$

Déterminons a et b :
Pour tout x réel, on a : soit $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = x^3 + x^2(a - 1) + x(b - a) - b$

Donc, par identification des coefficients (voir série 1, leçon 2, II), on a :

$$\begin{cases} a - 1 = -2 \\ b - a = -5 \\ -b = 6 \end{cases} \qquad \text{donc } b = -6 \text{ et } a = -1$$

Soit $P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$

3. $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x^2 - x - 6 = 0$
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25 > 0.$

L'équation $x^2 - x - 6 = 0$ admet deux solutions -2 et 3.
Donc S = {-2 ; 1 ; 3}

II - Inéquations

Propriété

Le signe du binôme $ax + b$(avec $a \neq 0$) est donné par le tableau suivant :

x		$\frac{-b}{a}$	
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

Exemple :

x		$\frac{1}{3}$	
$-3x + 1$	+	0	-

x		$\frac{2}{3}$	
$2 - 3x$	+	0	-

x		$\frac{1}{4}$	
$-1 + 4x$	-	0	+

x		0	
$-5x$	+	0	-

Application

Cette propriété, conjuguée avec la règle des signes, permet de résoudre des inéquations produit ou quotient dans lesquelles interviennent plusieurs facteurs.

Exemple : Étudiez le signe de $f(x) = \frac{(2x-1)(3-x)}{(x+2)(1-x)^3}$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		1		3		$+\infty$
$2x - 1$		-	|	-	0	+	|	+	|	+	
$3 - x$		+	|	+	|	+	|	+	0	-	
$x + 2$		-	0	+	|	+	|	+	|	+	
$(1 - x)^3$		+	|	+	|	+	0	-	|	-	
$f(x)$		+	||	-	0	+	||	-	0	+	

Attention : On ne peut pas supprimer des dénominateurs algébriques sans savoir si leur signe est constant.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{1}{x} < 2$

$$\frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2x}{x} < 0$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1 - 2x$		+		+	0	-	
x		-	0	+		+	
$\frac{1-2x}{x}$		-	||	+	0	-	

Donc : $S =]-\infty\ ;\ 0[\cup]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty[$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{x-1}{3x+2} \leq \frac{3x+2}{x-1}$

$$\frac{x-1}{3x+2} \leq \frac{3x+2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3x+2} - \frac{3x+2}{x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2 - (3x+2)^2}{(3x+2)(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-2x-3)(4x+1)}{(3x+2)(x-1)} \leq 0$$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$\frac{-2}{3}$		$\frac{-1}{4}$		1		$+\infty$
$-2x - 3$		+	0	-		-		-		-	
$4x + 1$		-		-		-	0	+		+	
$3x + 2$		-		-	0	+		+		+	
$x - 1$		-		-		-		-	0	+	
$f(x)$		-	0	+	||	-	0	+	||	-	

Donc : $S =]-\infty\ ;\ \frac{-3}{2}] \cup]\frac{-2}{3}\ ;\ \frac{-1}{4}] \cup]1\ ;\ +\infty[$

III - Systèmes

Pour résoudre un système d'inéquations à une inconnue, on résout chaque inéquation, puis on prend l'intersection des ensembles solutions.

Exemple : Résoudre $\begin{cases} -2 < -2x + 3 < 5 \\ -x^2 + x < 0 \end{cases}$

$-2 < -2x + 3 < 5$ est en réalité déjà un système :

$-2 < -2x + 3$ et $-2x + 3 < 5$

$2x < 5$ et $2x > -2$

$x < \frac{5}{2}$ et $x > -1$

$-x^2 + x < 0 \Leftrightarrow x(-x + 1) < 0$ (les racines sont 0 et 1)

$\Leftrightarrow x \in\ ]-\infty\ ;\ 0[\cup]1\ ;\ +\infty[$

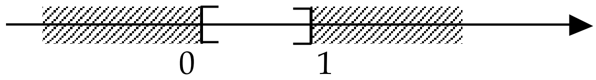
Finalement les solutions vérifient :

$x < \frac{5}{2}$ et $x > -1$ donc $S_1 =]-1 ; \frac{5}{2}[$ et

$x < 0$ ou $x > 1$donc $S_2 =]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$

Donc $S = S_1 \cap S_2 =]-1 ; 0 [\cup]1 ; \frac{5}{2}[$

et



IV - Exemple de résolution de problèmes

Une entreprise fabrique une certaine quantité n d'un article, n est un nombre entier. Le coût de fabrication de chaque article est de 350 euros. L'investissement nécessaire à la mise en place de la production est de 3 750 000 euros.

Exprimez le prix de revient $r(n)$ en euros d'un article en fonction du nombre d'articles fabriqués.

Quelle quantité minimale d'objets doit être produite pour que le prix de revient unitaire soit inférieur à 200 euros ? à 400 euros ?

Résolution

Le coût se décompose en frais fixes : 3 750 000 €
et en frais par article : 350 €

Donc n articles reviennent à : 3 750 000 + 350 n

Donc un article a un prix de revient : $r(n) = \frac{3\,750\,000}{n} + 350$

Si l'on veut $r(n) < 200$, il faut $\frac{3\,750\,000}{n} + 350 < 200$, soit $\frac{3\,750\,000}{n} < -150$, ce qui n'est pas réalisable car n est positif et –150 est négatif : cet objectif est hors de portée dans les conditions proposées.
On ne pourra pas obtenir un prix de revient unitaire inférieur à 200 euros.

Si l'on veut $r(n) < 400$, il faut $\frac{3\,750\,000}{n} + 350 < 400$, soit $\frac{3\,750\,000}{n} < 50$

$n > \frac{3\,750\,000}{50}$; $n > 75\,000$

Il faut donc produire plus de 75 000 articles pour obtenir un prix de revient unitaire inférieur à 400 euros.

Exercices non à soumettre

Exercice 9

Reprenez l'exemple de résolution du problème précédent en tenant compte de la modification suivante :
En réalité l'usure des machines impose après la production de 60 000 articles le remplacement d'une partie de l'infrastructure pour un coût total de 1 000 000 euros.
Le coût de fabrication de chaque article passe également à 210 euros.

Calculez le nombre minimal d'articles que l'entreprise doit produire pour obtenir un prix de revient unitaire inférieur à 400 €, 600 € et 250 €.

Exercice 10

Résolvez dans $\mathbb{R}$.

1. $3x - 1 < \dfrac{1}{2x + 3}$

2. $\dfrac{1}{x + 1} < \dfrac{-1}{1 - 4x}$

Exercice 11

Résolvez les systèmes d'inéquations suivants dans $\mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ 5 - x < 0 \\ x^2 + 2x + 1 > 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ 2x + 4 > 0 \\ x^2 + 4x - 5 > 0 \end{cases}$