Semaine 3

Signe d'un trinôme du second degré

1°/ Signe d'un trinôme
2°/ Inéquations de degré 2

Tests préalables (dans le livre)

- Exercices résolus p.29
- QCM (n° 76, 77) et Vrai / Faux (n°91) p.40

I) - Signe d'un trinôme de degré 2

Soit la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels quelconques, a non nul.
Soit Δ le discriminant de ce trinôme.
$F(x) = a \times \left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$

Propriété

f(x) est du signe de a pour tout x sauf entre ses racines s'il y en a.

Démonstration

- **si $\Delta < 0$,** alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ et $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ est la somme de deux positifs ; c'est donc un positif. Alors f(x) est du même signe que a.
- **Pour $\Delta = 0$**, $f(x) = a \times \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$. Alors f(x) est du même signe que a.
- **Pour $\Delta > 0$**, $f(x) = a \times \left[x - \left(\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]\left[x - \left(\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = a(x - x_1)(x - x_2)$

Supposons que $x_1 < x_2$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$x - x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x - x_1)(x - x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f(x)	signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a

Exemples

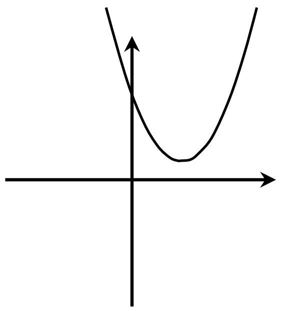
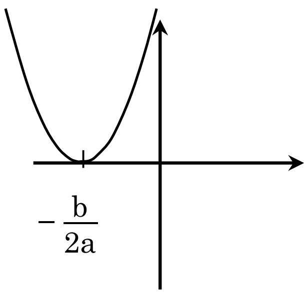
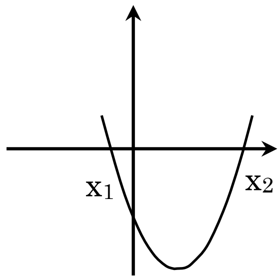
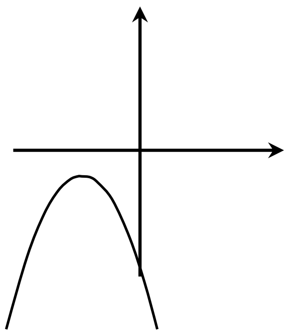
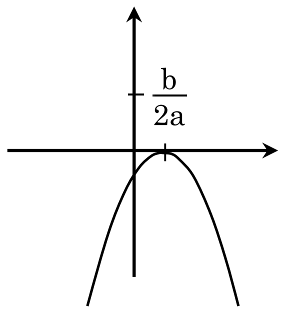
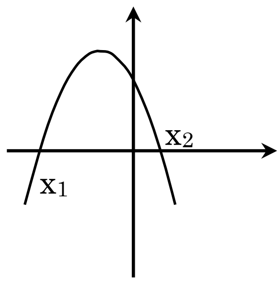
Déterminez le signe du trinôme $-x^2 + 4x - 4$
Son discriminant vaut $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 0$.
Donc le trinôme est du signe de -1. Alors $-x^2 + 4x - 4 < 0$ pour tout réel x.

Déterminez le signe du trinôme $3x^2 + x - 5$
$\Delta = 1 - 4 \times 3 \times (-5) = 61$
Les deux solutions sont $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{61}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{61}}{6}$
$3x^2 + x - 5$ est du signe de a, c'est-à-dire positif, hors de l'intervalle $[x_1 ; x_2]$

Interprétation graphique

Le fait que f(x) > 0 indique que pour cette valeur de x, le point de la courbe associé est au-dessus de l'axe des abscisses.
Inversement, si f(x) < 0, le point de la courbe associé est en dessous de l'axe des abscisses.

Il y a donc graphiquement 6 cas de figures, suivant le signe de a et de Δ :

	Si $\Delta < 0$	Si $\Delta = 0$	Si $\Delta > 0$
Si a > 0	La parabole est tournée vers le haut, entièrement au-dessus de l'axe Ox	La parabole est tournée vers le haut, au-dessus de l'axe Ox et touchant l'axe Ox en $-\frac{b}{2a}$	La parabole est tournée vers le haut, coupant l'axe Ox deux fois aux valeurs x_1 et x_2
			
Si a < 0	La parabole est tournée vers le bas, entièrement en dessous de l'axe Ox	La parabole est tournée vers le bas, en dessous de l'axe Ox et touchant l'axe Ox en $-\frac{b}{2a}$	La parabole est tournée vers le bas, coupant l'axe Ox deux fois aux valeurs x_1 et x_2
			

II) - Inéquations de degré 2

Toute inéquation de degré 2 peut être simplifiée pour se présenter sous la forme standard :
$ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$
Résoudre une inéquation du degré 2 revient donc à étudier le signe d'un trinôme du second degré.

Exemple

Soit $f(x) = x^2 + 5x + \frac{7}{2}$ et $g(x) = -x^2 - 3x$.

Déterminez l'ensemble des réels x tels que $f(x) > g(x)$.

Soit $h(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 + 8x + \frac{7}{2}$

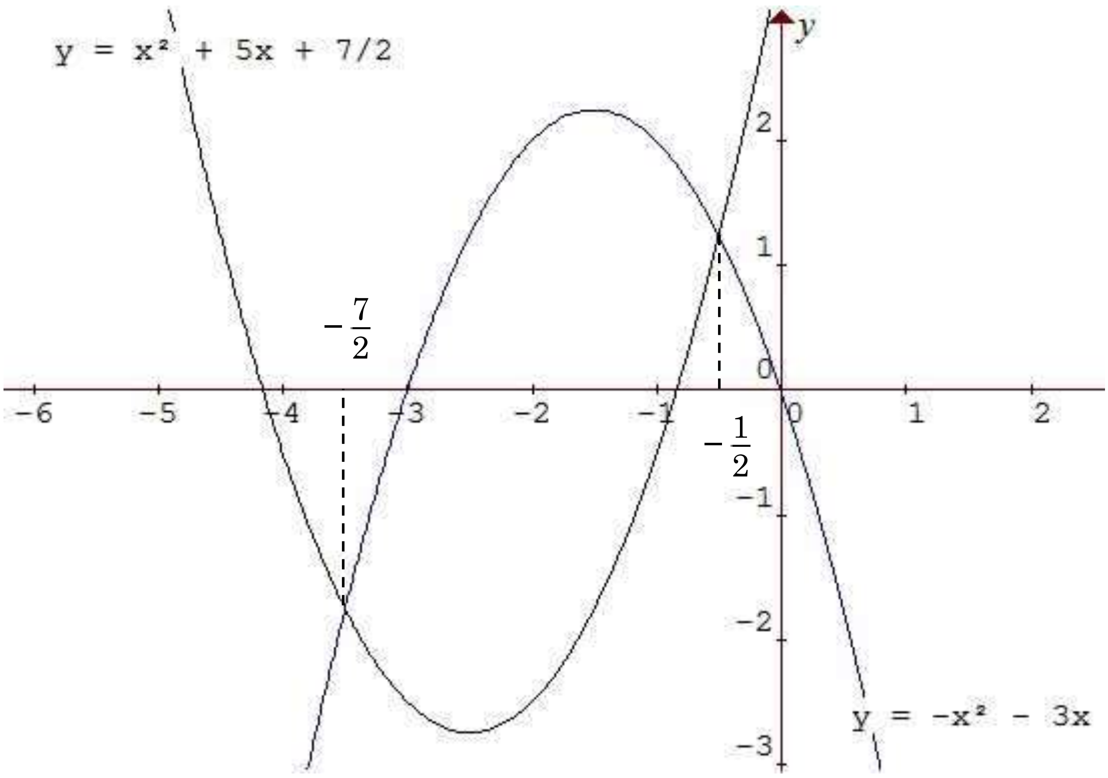
L'inéquation $f(x) > g(x)$ est équivalente à $h(x) > 0$.

$\Delta = 64 - 28 = 36$. $\sqrt{\Delta} = 6$; $x_1 = \frac{-8-6}{4} = -\frac{7}{2}$; $x_2 = \frac{-8+6}{4} = -\frac{1}{2}$

h(x) est du signe de 2 donc positif pour les valeurs de x n'appartenant pas à l'intervalle fermé $[-\frac{7}{2} ; -\frac{1}{2}]$.

C'est-à-dire qu'entre ces deux valeurs, $f(x) < g(x)$

Confirmation graphique :



Équations se ramenant au second degré

Une équation de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ est dite **bicarrée**.

On pose $X = x^2$

Une nouvelle équation d'inconnue X apparaît : $aX^2 + bX + c = 0$.

Cette équation aura 0, 1 ou 2 solutions.

Seules les racines positives X_i de ce trinôme seront à prendre en compte, puisqu'un carré ne peut être négatif.

Il faudra ensuite calculer les valeurs possibles de x vérifiant $X = x^2$

Exemple

Soit à résoudre $x^4 + x^2 - 2 = 0$.

On pose $X = x^2$. D'où $X^2 + X - 2 = 0$
Les racines de ce trinôme sont 1 et -2.
D'où $x^2 = 1$ (équation possible) ou bien $x^2 = -2$ (équation impossible).
Donc les solutions de l'équation initiale d'inconnue x sont 1 et -1.

D'autres exemples :

Dans chacun de ces cas, on pourra résoudre en opérant un changement de variable :

a) $ax + b\sqrt{x} + c = 0$; on posera $X = \sqrt{x}$

b) $\dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x} + c = 0$; on posera $X = \dfrac{1}{x}$

c) $x + \sqrt{x-1} = 3$; on posera $X = \sqrt{x-1}$.
Alors $X^2 = x - 1$ et $x = X^2 + 1$
L'équation en x deviendra en X : $X^2 + 1 + X = 3$ ou bien $X^2 + X - 2 = 0$.
Les racines de ce trinôme sont 1 et -2
Mais $\sqrt{x-1}$ ne peut pas être négatif.
Donc la seule solution de l'équation initiale proviendra de $\sqrt{x-1} = 1$ qui donnera $x = 2$.

Exercices

Exercice 1

Déterminez le signe des trinômes suivants :

- $2x^2 - 3x + 4$
- $x^2 - 6x + 3$
- $-x^2 - 4x + 1$
- $x^2 - 9x$

Exercice 2

Résolvez l'inéquation $x^2 - 3 \leq 0$

Exercice 3

Résolvez l'inéquation $3x^2 - 5x + 2 > 0$

Exercice 4

Résolvez l'inéquation $\dfrac{2x+1}{x^2+3} \leq 2$

Exercice 5

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 + bx + 2$
Déterminez b pour que la courbe représentative de f soit au-dessus de l'axe des abscisses.

Exercice 6

Démontrez que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-5x}{2x^2+x+1}$ est définie pour tout x réel.
Montrez que pour tout x, $-2 < f(x) < 4$.

Exercice 7

Une ficelle de 1 m est coupée en deux morceaux, l'un pour former un carré l'autre un cercle.
Déterminez l'endroit de la ficelle où l'on doit couper pour que la somme des aires des deux surfaces obtenues soit minimale.

Exercice 8

Résolvez l'inéquation $(x^2 - x - 2)(x^2 - 3x - 4) \leq 0$.

Exercice 9

Déterminez si 0,5 et 2,5 sont des extremums de $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - x + 3}{2x^2 + x + 1}$

Exercice 10

Soit ABCD un rectangle tel que AB = 3 cm et BC = 5 cm. On considère les points M de [AB], N de [BC], P de [CD] et Q de [DA] tels que MA = NB = PC = QD = x (en cm).
Déterminez l'aire $\mathcal{A}(x)$ du parallélogramme MNPQ en fonction de x, évaluée en cm².
Déduisez l'aire maximale M et l'aire minimale m.

Exercice 11

Résolvez les équations bicarrées suivantes :

- $6x^4 - 5x^2 - 1 = 0$
- $2x^4 - 5x^2 - 3 = 0$
- $x^4 - x^2 - 1 = 0$

Exercice 12

Résolvez l'équation $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$

Exercice 13

Résolvez l'équation $-\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1 = 0$

Exercices supplémentaires du manuel :

28, 34, 49, 50, 53, 55, 56, p. 35 à 37.