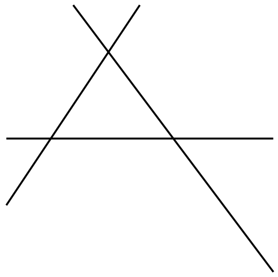
SEMAINE 2

I) Droites du triangle

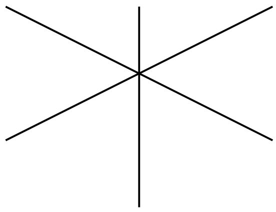
1) Les médiatrices ; cercle circonscrit

a) Rappels de vocabulaire

Deux droites sont parallèles ou sécantes. Elles sont sécantes si elles se coupent. Le point où elles se coupent s'appelle le point **d'intersection**.
Lorsque l'on trace une troisième droite, sécante aux deux premières, passant par leur point d'intersection, on dit que les trois droites sont **concourantes**.
Le point commun aux trois droites s'appelle alors **le point de concours**.

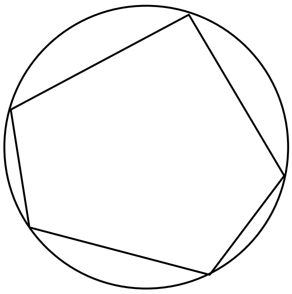


Droites sécantes deux à deux

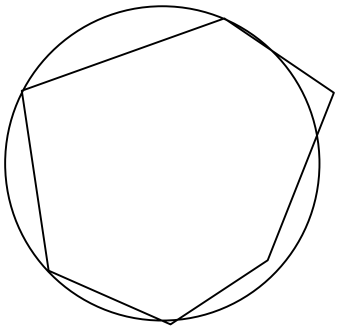


Droites concourantes.

Le **cercle circonscrit** à une figure est le cercle passant par les sommets de cette figure. La figure est alors **inscrite** dans le cercle.



Pentagone et son cercle circonscrit.



Hexagone non inscriptible (qui n'a pas de cercle circonscrit)

b) Propriétés des médiatrices du triangle.

Tous les triangles ont un cercle circonscrit. Le centre de ce cercle est le point de concours des médiatrices des trois côtés du triangle.

2) Hauteurs du triangle

a) Définition

Une hauteur dans un triangle est le segment joignant un sommet à son projeté orthogonal sur le côté opposé.

b) Aire du triangle

Dans un triangle quelconque, il y a trois côtés et pour chacun d'eux, une hauteur associée.
Il y a donc trois manières de calculer l'aire :
Si c désigne la longueur d'un côté et h la longueur de la hauteur associée :

$$\mathcal{A} = \frac{c \times h}{2}$$

Dans un triangle rectangle, Il n'y a plus que deux manières de calculer l'aire :
Si c désigne la longueur de l'hypoténuse et h la longueur de la hauteur associée, et si a et b désignent les longueurs des deux côtés de l'angle droit :

$$\mathcal{A} = \frac{c \times h}{2} = \frac{a \times b}{2}$$

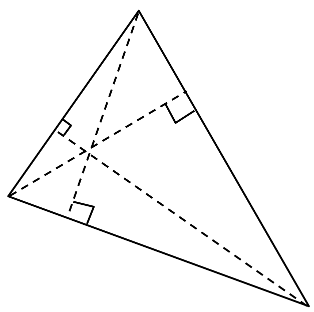
c) Propriété des hauteurs d'un triangle :

Les trois hauteurs d'un triangle (ou les droites qui les portent) sont concourantes.
Le point de concours s'appelle l'orthocentre du triangle.

d) Idée de la démonstration :

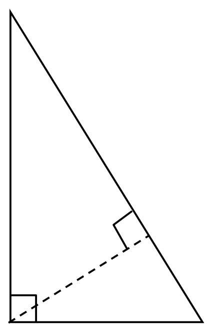
On construit « autour » du triangle initial, un second triangle, de telle sorte que les hauteurs de l'un deviennent les médiatrices de l'autre. On applique alors la propriété des médiatrices dans un triangle.

Pas d'angle obtus



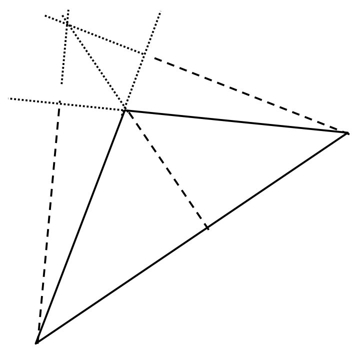
Les trois hauteurs et l'orthocentre sont intérieurs au triangle

Triangle rectangle



L'orthocentre est le sommet de l 'angle droit. Deux hauteurs sont les côtés de l'angle droit.

Un angle obtus



Deux hauteurs et l'orthocentre sont extérieurs au triangle.

3) Les médianes du triangle

a) Définition :

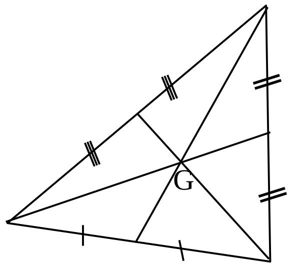
Une médiane dans un triangle est le segment joignant un sommet au milieu du côté opposé.

b) Propriété d'une médiane dans un triangle :

Une médiane d'un triangle partage le triangle en deux triangles de même aire.
En effet, dans ABC, si A' est le milieu de [BC] et H le pied de la hauteur issue de A, les aires des deux triangles ABA' et ACA' se calculent par $\frac{1}{2} \times BA' \times AH$ et $\frac{1}{2} \times CA' \times AH$. Or BA' et CA' sont deux longueurs égales.

c) Propriété des médianes d'un triangle :

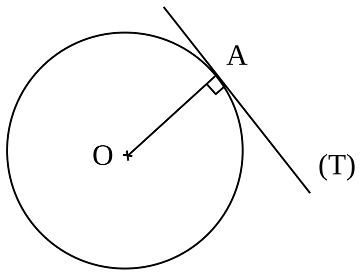
Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.
Le point de concours s'appelle le centre de gravité du triangle.
Il est situé aux deux tiers de la longueur de la médiane à partir du sommet



4) Les bissectrices des angles du triangle.

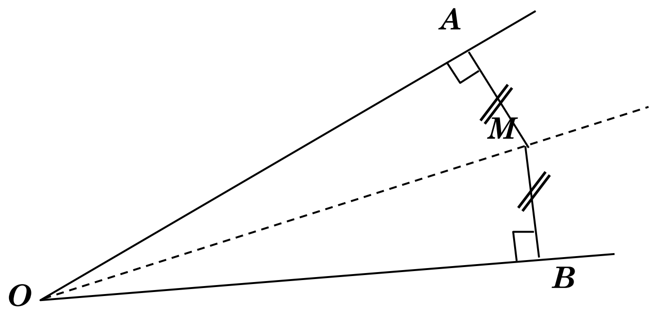
a) Rappels :

La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui est axe de symétrie de l'angle.
Une droite qui n'a qu'un seul point commun avec un cercle est une **tangente** au cercle.
Si (T) est tangente, en un point A, à un cercle de centre O, alors (T) $\perp$ (OA).



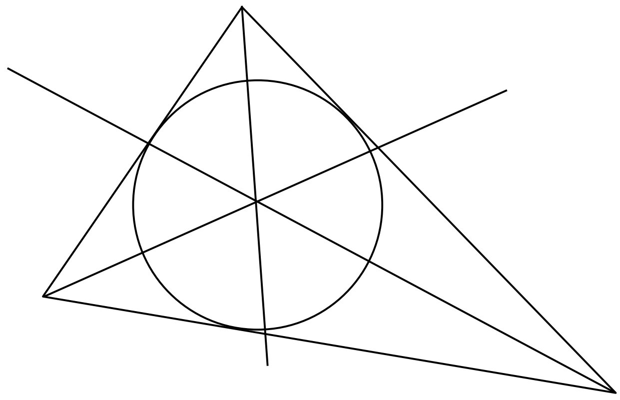
b) Propriété des points d'une bissectrice :

Si un point est situé sur la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de l'angle.
Si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il est. situé sur la bissectrice de cet angle



c) Propriété des bissectrices dans un triangle :

Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.
Leur point de concours est le centre du cercle inscrit dans le triangle.
On montre que le point I d'intersection de deux des bissectrices est équidistant des trois côtés du triangle, et qu'il est donc sur la troisième bissectrice.



II) <u>Les transformations</u>

Les transformations géométriques évoquées dans ce chapitre ont été abordées au collège.
Il s'agit de : la **symétrie axiale** ou **orthogonale** (autrement appelée « réflexion »)
la **rotation** (dont la symétrie centrale qui est une rotation d'un demi-tour)
la **translation**

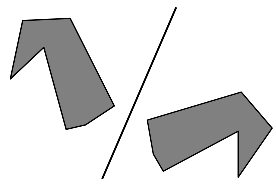
Si on désigne par f l'une de ces transformations, cette transformation f associe, à tout point M du plan, un point M', appelé **image de M par f**.
On note : f : M $\mapsto$ M' ou encore f(M) = M'

1) Symétrie axiale

<u>Définition</u> : Deux points A et B sont symétriques par rapport à une droite (d) si (d) est la médiatrice de [AB] ; c'est à dire si (d) est perpendiculaire à [AB] en son milieu.

Par symétrie axiale, une figure et sa symétrique se superposent en pliant le long de l'axe de symétrie.

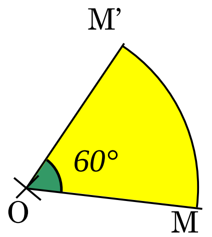
Définir une symétrie axiale, c'est définir l'axe de symétrie.

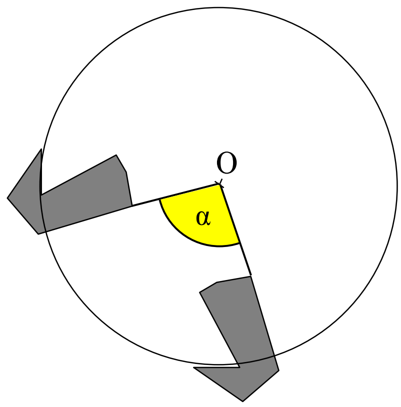


Si f est la symétrie d'axe (D) : f(M) = M' est équivalent à :
(D) est la médiatrice de [MM']

2) Rotation

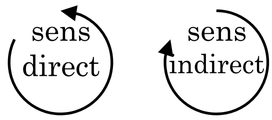
<u>Définition</u> : Pour un point O et un angle α donnés, la **rotation** de centre O et d'angle α fait tourner un point M sur le cercle de centre O et de rayon OM, de telle sorte que l'angle $\widehat{MOM'}$ soit égal à l'angle α





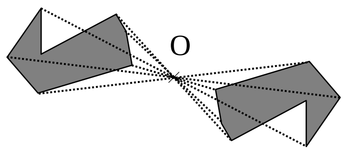
Définir une rotation, c'est définir le centre et l'angle de la rotation.
Si f est la rotation de centre O et d'angle α : f(M) = M' est équivalent à :
$OM = OM'$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$

La rotation est dite de **sens direct** dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
Le sens est **indirect** dans le sens des aiguilles d'une montre.



3) Symétrie centrale

<u>Définition</u> : Une **<u>symétrie centrale</u>** est une rotation particulière pour laquelle l'angle est 180°

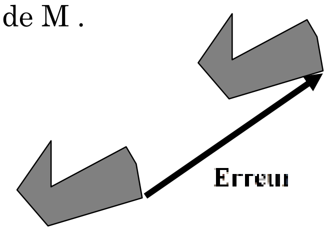


Si f est la symétrie de centre O : f(M) = M' est équivalent à : O est le milieu de [MM']

4) Translation

<u>Définition</u> : L'image d'un point M par la translation de vecteur **Erreur !** est le point M' tel que :
- Les demi-droites [AA') et [MM') sont parallèles et de même sens
- [AA'] et [MM'] ont la même longueur.

On dit que M' est le **<u>translaté</u>** de M .



Par translation, une figure et sa translatée se superposent en glissant le long de la direction.

Définir une translation, c'est définir le vecteur de translation.
Si f est la translation de vecteur **Erreur !** : f(M) = M' est équivalent à : **Erreur !** = **Erreur !**

5) Propriétés des transformations :

Toutes ces transformations laissent inchangée la forme des figures transformées. C'est à dire que l'image d'une figure est superposable à la figure initiale.
Donc :
- Les longueurs sont conservées (donc les milieux)
- Les angles sont conservés. (en particulier les angles droits, càd l'orthogonalité)
- Les aires sont conservées.
- Le parallélisme est conservé.

Exercices type

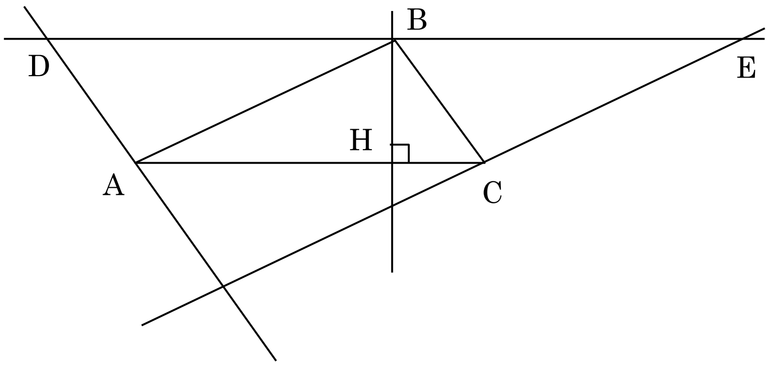
Exercice 1 Démonstration de la propriété des hauteurs d'un triangle

ABC est un triangle. (d_1) est la parallèle à (AC) passant par B.
(d_2) est la parallèle à (AB) passant par C. (d_3) est la parallèle à (BC) passant par A.
(d_1) coupe (d_2) en E ; (d_1) coupe (d_3) en D ; (d_2) coupe (d_3) en F.
H est le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

1. Montrer que B est le milieu de [DE] et que (BH) est la médiatrice de [DE]
2. De la même manière, montrer que les deux autres hauteurs dans ABC sont les deux autres médiatrices dans DEF.
3. Conclure.

Solution :

Figure et données :



<u>Données</u> :
ABC triangle
(DF) // (BC)
(EF) // (AB)
(DE) // (AC)
(BH) est une hauteur du triangle ABC.

Démonstration :
Montrons que B est le milieu de [DE]
BECA et DBCA sont des parallélogrammes car ils ont leurs côtés parallèles deux à deux. Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles et de même longueur. Donc (BD) et (BE) sont parallèles à la même droite (AC) ; les points **B, D et E sont alignés**. De plus, les longueurs **BD et BE sont égales** car elles sont toutes les deux égales à la même longueur AC.
Conclusion : B est le milieu de [DE]

Montrons que (BH) est la médiatrice de [DE]
B est le milieu de [DE] , et par construction , (BH) $\perp$ (AC) ; or (AC) // (DE) donc (BH) est perpendiculaire à [DE] en son milieu. C'est donc la médiatrice de [DE]
De la même manière, on montre que les deux autres hauteurs dans ABC sont les deux autres médiatrices dans DEF. Le raisonnement est tout à fait analogue.

Conclusion : les trois hauteurs du triangle ABC sont les trois médiatrices de DEF. Or on sait que les trois médiatrices dans un triangle sont concourantes. Donc les trois hauteurs le sont aussi.

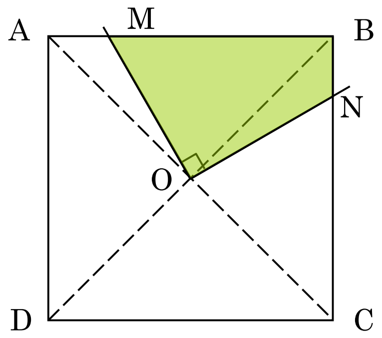
Exercice 2 Démonstration utilisant une rotation

ABCD est un carré de centre O. M est un point de [AB] et N un point de [BC] tels que $\widehat{MON} = 90°$.

1) Démontrer que MO = ON.

2) Démontrer que l'aire du quadrilatère MONB est indépendante de la position choisie pour M sur [AB]

Solution :



Considérons le rotation r, de centre O et d'angle 90° dans le sens indirect.

1) AO = OB et $\widehat{AOB} = 90°$, c'est à dire que B est l'image de A par r. (on écrit r(A) = B).

De même, l'image de B est C : r(B) = C.

On en déduit que l'image de (AB) par r est (BC).

$\widehat{MON} = 90°$, donc l'image de la droite (OM) par r est la droite (ON).

Le point M est situé à la fois sur (AB) et sur (OM); son image sera donc à la fois sur l'image de (AB) et sur l'image de (OM). C'est à dire que l'image de (OM) est le point d'intersection des droites (BC) et (ON). C'est donc le point N.

Et puisque N = r(M), par définition, OM = ON.

2) Soit I le milieu de [AB] et J celui de [BC]

La rotation conserve les milieux, donc l'image par r du milieu I de [AB] est le milieu J de l'image de [AB] qui est [BC]

N = r(M) ; J = r(I) et O est invariant (r(O) = O), donc l'image par r du triangle MOI est le triangle NOJ.

La rotation conserve les aires, donc les deux triangles NOJ et MOI ont la même aire.

Dans le quadrilatère MONB, on peut remplacer, dès lors, le triangle MOI par le triangle NOJ sans modifier l'aire. On forme ainsi le carré IOJB dont l'aire est bien sûr constante.

✍Exercices non à soumettre

Les corrigés sont page **Erreur ! Signet non défini.**

Exercice 1 : Démonstration de la propriété des médianes d'un triangle

ABC est un triangle. I milieu de [AB] ; K milieu de [AC]. [CI] et [BK] se coupent en G. (AG) coupe (BC) en J.
1) En utilisant la propriété de la médiane rappelée en cours, montrer que GAB et GBC ont la même aire, de même que GAC et GBC.
2) Montrer que J est le milieu de [BC] ; conclure.
3) Montrer que CG = 2 × GI (en utilisant des considérations sur les aires).

Exercice 2 : Démonstration de la propriété des bissectrices d'un triangle

ABC est un triangle.
[Ax) bissectrice de $\widehat{BAC}$; [By) bissectrice de $\widehat{ABC}$.
[Ax) et[By) se coupent en I..
J est le projeté orthogonal de I sur [AB] (c'est à dire Que J est le point de [AB] tel que (IJ) ⊥ (AB).)
K est le projeté orthogonal de I sur [BC]
L est le projeté orthogonal de I sur [AC]

1. Montrer que IJ = IK = IL
2. Montrer que [CI) est la bissectrice de $\widehat{BCA}$.

Exercice 3

BAC est un triangle rectangle en A. La bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ coupe [AB] en I.
La médiatrice de [CI] coupe [CI] en O, [AC] en K et [BC] en L.

1. Montrer que CKIL est un losange.
2. Montrer que A, K, O et I sont sur un même cercle.

Exercice 4

Soit IJK un triangle, H le projeté orthogonal de K sur (IJ) tel que IH = 3 cm, IJ = 5 cm, HJ = 2 cm et HK = 1,5 cm. Le cercle (C) de diamètre [IK] coupe (KJ) en K et en L. Le cercle (C ') de diamètre [JK] coupe (IK) en K et en M.
Démontrer que H est sur les deux cercles (C) et (C ').
Démontrer que (IL) est perpendiculaire à (KJ) et que (JM) est perpendiculaire à (IK).
Démontrer que les droites (IL), (KH) et (JM) sont concourantes.

Exercice 5

Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC inscrit dans un cercle (C) de centre O. Faire une figure avec OA = 6 cm, $\widehat{AOB}$ = 140° et BC = 9 cm. A' est le symétrique de H par rapport à (BC), B' est le symétrique de H par rapport à (AC) et C' est le symétrique de H par rapport à (AB).
Quelle remarque peut-on faire concernant ces trois points ?
Nous nous proposons maintenant de démontrer la propriété suivante :
Les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés du triangle sont trois points du cercle circonscrit au triangle.
Pour cela : en plus des notations précédentes,

I est le milieu de [BC] ; M est le point d'intersection de (AH) et (BC) ; H' est le symétrique de H par rapport à I.
1) Montrer que BHCH' est un parallélogramme.
2) Montrer que ABH' et ACH' sont deux triangles rectangles.
3) Montrer que (A'H') // (BC).
4) Conclure que A' ∈ (C)

Exercice 6

Sur un segment [AB] de milieu O, placer un point C distinct de A , de O et de B. Tracer l'un des deux demi-cercles de diamètre [AB]. La perpendiculaire à (AB) passant par C coupe ce demi-cercle en D. Quelle est la nature de ABD ?
La perpendiculaire à (AD) passant par O coupe (AD) en H. On appelle E le point commun à (OH) et (DC). Montrer que (AE) et (OD) sont perpendiculaires .

Exercice 7

ABCD est un carré ; M est un point du côté [CD] et N est le point de la droite (BC) non situé sur [BC] tel que CN = CM.
(Δ) est la perpendiculaire à (AN) passant par M.
Le but de l'exercice est de montrer que, quelle que soit la position de M sur [CD] , (Δ) passe toujours par le même point X dont on précisera la nature.
Pour déterminer la position de X, il suffit de faire la construction proposée (sur la même figure) en plaçant M à différents endroits sur le segment [CD]
Appelons r la rotation de centre C et d'angle 90° (dans le sens contraire des aiguilles d'une montre; c'est à dire le sens direct).
1) Quelle est l'image par r de N?
2) Soit I le point d'intersection de (AN) et (CD). Quelle est son image par r?
3) Quelle est l'image de (AN) par r ?
4) Quelle est l'image de A par r ? Conclure.

Exercice 8

On considère le triangle PQR, N est le milieu du segment [PQ], T est le milieu du segment [PR] et S est le milieu du segment [QR]. (PH) est la hauteur du triangle PQR issue de P.
Montrer que TS = HN.

Exercice 9

ABC est un triangle; O est le centre du cercle (C) circonscrit à ABC.
Les trois bissectrices intérieures du triangles ABC sont concourantes en I.
(AI) coupe (C) en A' ; (BI) coupe (C) en B' et (CI) coupe (C) en C'.
1) Montrer que A' est un point de la médiatrice de [BC]
2) Montrer que AC'I est isocèle en C', de même que BC'I. En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit à ABI.
3) Montrer que B' est le centre du cercle circonscrit à ACI et que A' est le centre du cercle circonscrit à BCI.
4) Montrer que I est l'orthocentre du triangle A'B'C'.

Exercice 10

ABC est un triangle équilatéral, CBD et ABE sont deux triangles rectangles isocèles en B disposés à l'extérieur de ABC.
I est le milieu de [AC] et J celui de [ED].
H est le point d'intersection de [AD] et [EC].

On se propose de démontrer de deux manières différentes que EC = AD et que les droites (EC) et (AD) sont perpendiculaires.

Première méthode : avec les rotations
On note r la rotation de centre B, d'angle 90° dans le sens direct.

1. **a)** Quelles sont les images de A et D par r ?
b) En déduire l'image du segment [AD] par r.

2. Démontrer alors que CE = AD et que les droites (EC) et (AD) sont perpendiculaires.

Deuxième méthode : avec les réflexions

1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABI}$.
Pour la suite de l'exercice, on admet que les points I, B et J sont alignés et que (IJ) est la médiatrice de [DE] et [AC].

2. En utilisant une symétrie axiale (dont on précisera l'axe), démontrer que EC = AD.

3. On trace le cercle C de centre B passant par A.
a) Pourquoi les points E, D, C appartiennent-ils à C ?
b) Démontrer que $\widehat{EDA} = \widehat{CED} = 45°$.
c) En déduire que les droites (EC) et (AD) sont perpendiculaires.

Exercice 11

ABC est un triangle tel que BC = 2AC. D est le milieu de [BC], E est le milieu de [CD] et F est le milieu de [AC]. Les segments [AE] et [DF] se coupent au point G.
Démontrer que AGD est un triangle isocèle en G.

Exercice 12

ABC est équilatéral et (C) son cercle circonscrit. M est un point quelconque du petit arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$. En utilisant une rotation de centre A, montrer que MA + MB = MC.

Exercice 13

On considère le triangle MNP rectangle en M. La hauteur de ce triangle issue de M coupe [NP] en H. I et J sont les milieux respectifs de [MN] et [MP].
En utilisant une symétrie axiale (à préciser), montrer que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

Exercice 14

Soit ABCD un parallélogramme de centre I. Une droite (D) passant par I coupe la (AB) en E, (CD) en F, (AD) en K et (BC) en L.
En utilisant la symétrie de centre I, montrer que les droites (BK) et (DL) sont parallèles.

Envoyer le devoir à soumettre n° 1

✸✸✸✸✸