17. Compas, cercles et distances

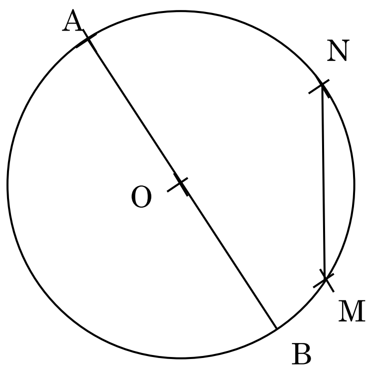
Le cercle

> Définition :
>
> O est un point donné et R un nombre donné.
> On appelle **cercle** de centre O et de rayon R, la ligne formée de tous les points du plan situés à la distance R de O.
> On appelle **disque** de centre O et de rayon R, les points du plan situés à l'intérieur du cercle de rayon R et de centre O.

Pour tracer un arc de cercle, on précisera toujours son centre et son rayon. Lorsque l'on trace un cercle dans un programme de construction, on dit simplement :
Tracer le cercle de centre … et de rayon ….

O est le centre du cercle. Ce n'est pas un point du cercle.

- A, B, M et N sont des points du cercle.
- [OA], [OB], [OM], [ON] sont des rayons du cercle.
- [MN] est une corde du cercle.
- [AB] est un diamètre du cercle. C'est la plus longue de toutes les cordes.
- $\overset{\frown}{AN}$ $\overset{\frown}{BN}$ désignent des arcs de cercle, les plus courts ; par exemple pour $\overset{\frown}{BN}$, il ne contient pas le point A mais le point M.

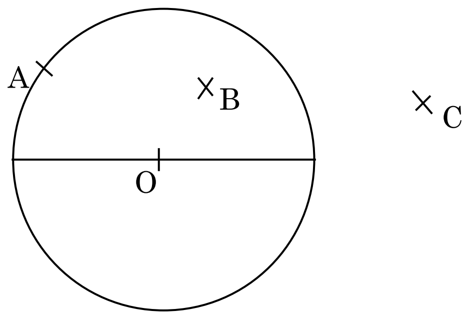


Cercle et distance

Le cercle est la ligne formée par tous les points situés à la distance R du centre O.
Cette ligne partage le plan en deux parties (en plus du cercle lui-même), ce qui est à l'extérieur, et ce qui est à l'intérieur (le disque).
Un point est dans le disque de centre O et rayon R s'il est situé à une distance inférieure à R de O.
Un point est situé à l'extérieur du disque de centre O et rayon R s'il est situé à une distance supérieure à R de O.
Ici, par exemple :

($\mathcal{C}$) est le cercle de centre O et de rayon 2 cm.

A est à 2 cm de O.
B est à moins de 2 cm de O.
C est à plus de 2 cm de O.



Exercices

Exercice 153

Tracer un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et placer deux points A et B sur ce cercle. On appelle I le milieu de [AB].
Démontrer que A et B sont symétriques par rapport à (OI).

Exercice 154

Deux cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ de centres A et B et de même rayon se coupent en E et F.
Quelle est la nature des triangles AEB, AFB, AEF et BFE?

Exercice 155

Deux cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ de centres A et B et de même rayon se coupent en E et F. (AB) coupe $(\mathcal{C}_1)$ en I et J et $(\mathcal{C}_2)$ en K et L.
Quelle est la nature des triangles IEF, JEF, KEF et LEF?

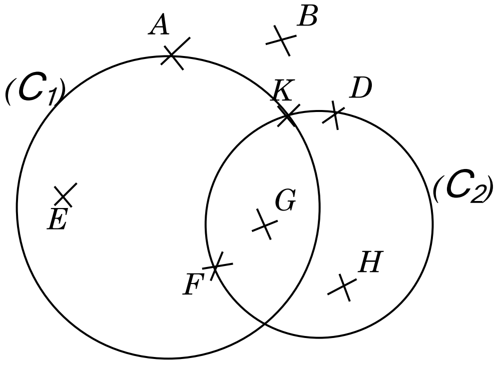
Exercice 156

A et B sont deux points donnés, c'est à dire les extrémités d'un segment.
Pour placer un point M vérifiant deux conditions du type :

$\begin{cases} \text{M est à 4 cm de A ❶} \\ \text{M est à 3 cm de B ❷} \end{cases}$

On va utiliser le compas.
La condition ❶ signifie que le point M peut se trouver en n'importe quel endroit du cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre A et de rayon 4 cm.
La condition ❷ signifie que le point M peut se trouver en n'importe quel endroit du cercle $(\mathcal{C}_2)$ de centre B et de rayon 3 cm.
Finalement, il n'y a que deux points qui vérifient ces deux conditions, ce sont les points d'intersection des cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

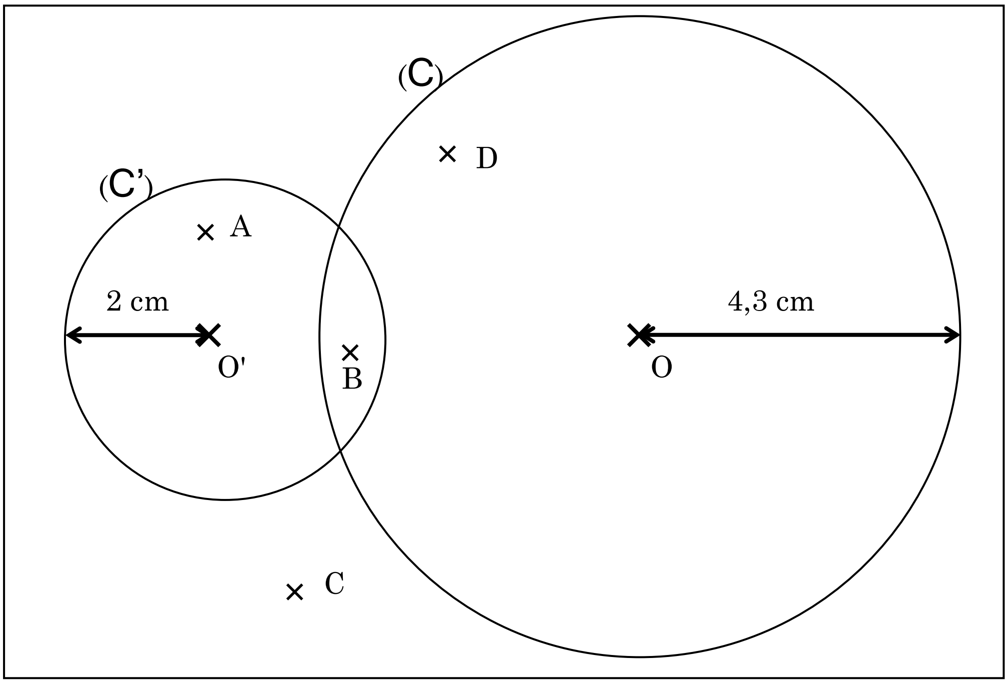
Sur ce dessin, $(\mathcal{C}_1)$ est le cercle de centre I et de rayon 2 cm; $(\mathcal{C}_2)$ est le cercle de centre J et de rayon 1,5 cm. Alors :
A est un point situé à 2 cm de I et à plus de 1,5 cm de J.
B est un point situé à plus de 2 cm de I et à plus de 1, 5 cm de J.



Décrire de la même manière les positions des points D, E, F, G, H, et K.

Exercice 157

Les deux cercles font apparaître 4 zones (plus 4 portions de lignes)

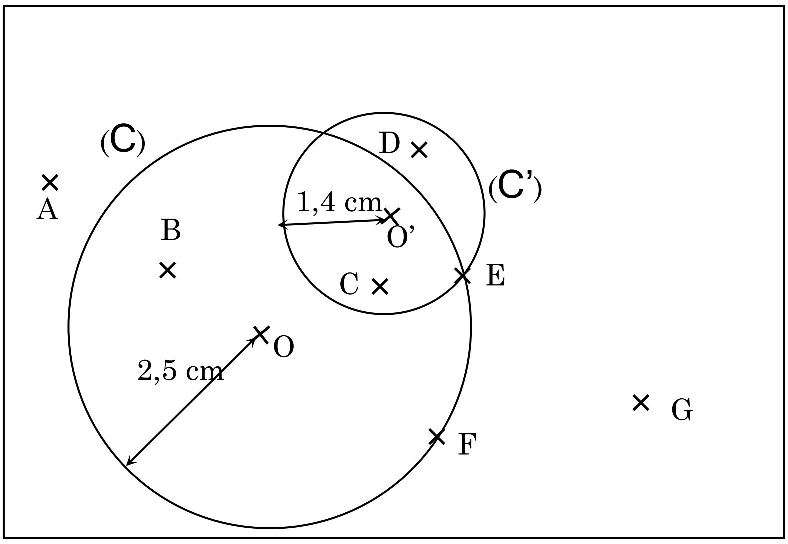


Ces quatre zones peuvent être décrites par rapport aux cercles (C_1) et (C_2) (à l'intérieur, sur ou à l'extérieur) ou en termes de distances par rapport à O et O' (à x cm de …, à plus de x cm de …, à moins de x cm de …)

Décrire la position des points A, B, C et D des deux manières.

Exercice 158

Décrire la position des points A, B, C, D, E, F et G par rapport aux cercles puis par rapport à leurs centres.



18. Médiatrice et cercle circonscrit

Définition

Si A et B sont symétriques par rapport à une droite (D), on dit que (D) est l'axe de symétrie du segment [AB].
L'axe de symétrie d'un segment s'appelle la médiatrice de ce segment.

Propriété n°1 :

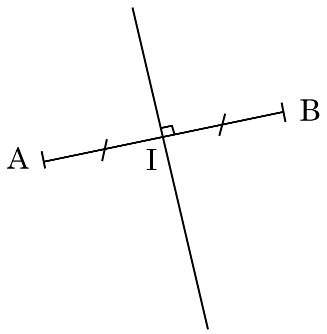
La médiatrice d'un segment est la perpendiculaire à ce segment en son milieu.

Ce qui peut se traduire par deux phrases réciproques :

- Si une droite (D) est la médiatrice d'un segment, alors elle est perpendiculaire à ce segment et le coupe en son milieu.
- Si une droite (D) coupe un segment perpendiculairement en son milieu, alors c'est la médiatrice de ce segment.

Conséquence : Construction de la médiatrice d'un segment à l'équerre graduée.
Le segment [AB] est donné. Il s'agit de construire sa médiatrice.
Placer le milieu I de [AB].
Tracer, en I, la perpendiculaire à [AB].

Codage de la médiatrice

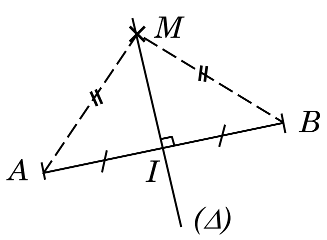


Le codage de la médiatrice sera composé du codage des longueurs égales et du signe des perpendiculaires.

Propriété n°2

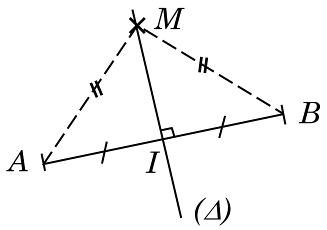
Si un point est sur la médiatrice d'un segment alors il est situé à la même distance des deux extrémités de ce segment.

Si (Δ) est la médiatrice de [AB]
Si M ∈ (Δ)
alors MA = MB



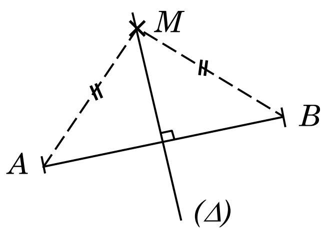
> Propriété n°3 :
>
> Si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors c'est un point de la médiatrice de ce segment.

Si (Δ) est la médiatrice de [AB]
et si MA = MB
alors M ∈ (Δ)



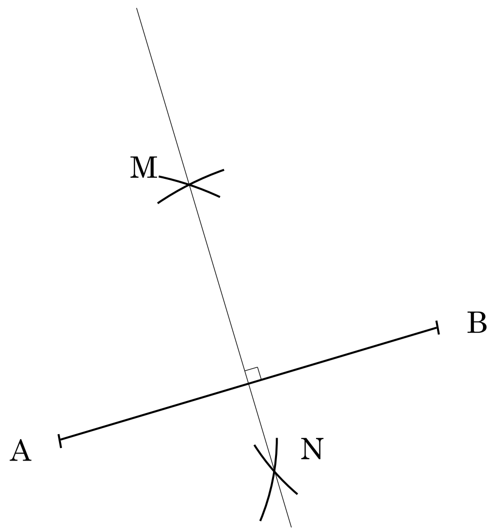
> Propriété n°4 :
>
> La perpendiculaire à un segment passant par un point équidistant des extrémités de ce segment est la médiatrice de ce segment.

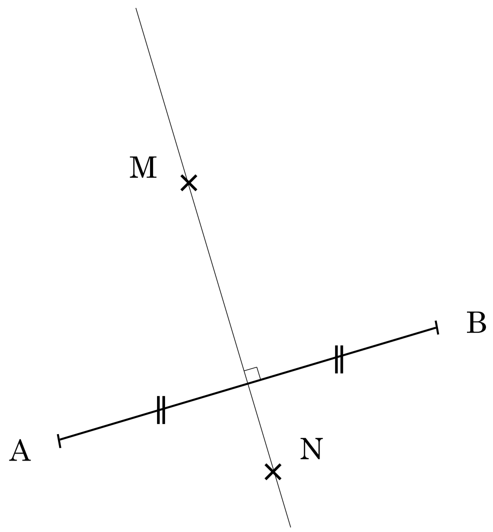
Si (Δ) ⊥ [AB]
Si M ∈ (Δ)
et si MA = MB
alors (Δ) est la médiatrice de [AB]



De ces propriétés découlent d'autres constructions possibles de la médiatrice :

- Au compas seul : placer deux points ; chaque point étant équidistant des extrémités du segment.





- Avec le compas et l'équerre : (illustration de la propriété 4)

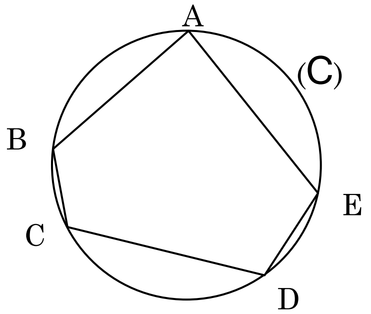
Placer un point équidistant des extrémités du segment.
Tracer la perpendiculaire au segment passant par ce point.

Cercle circonscrit au triangle

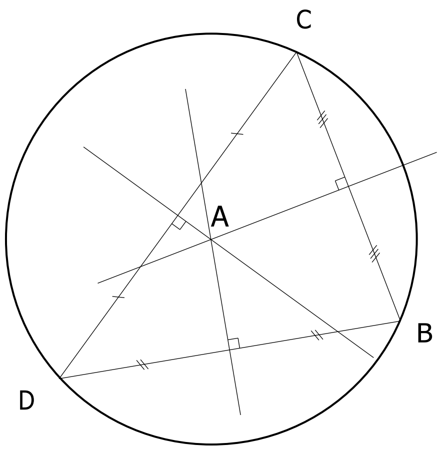
> Définition :
>
> Lorsque tous les sommets d'une figure sont situés sur le même cercle, on dit que le cercle est **circonscrit** à la figure et que la figure est **inscrite** dans le cercle.

Le **pentagone** ABCDE est inscrit dans le cercle (C)

Le cercle (C) est **circonscrit** au pentagone ABCDE.



> Propriété :
>
> Les trois médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes. Le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit au triangle.



Démonstration de la propriété :
On trace les médiatrices de deux côtés [BC] et [CD]; elles se coupent en A.
A étant sur la médiatrice de [BC], AB = AC.
A étant sur la médiatrice de [CD], AC = AD.
AB = AC et AC = AD, donc AB = AD.
Si AB = AD, alors A est sur la médiatrice de [BD], donc les trois médiatrices passent par le point A. Elles sont concourantes.
Comme par ailleurs on a montré que AB = AC = AD, alors A est le centre d'un cercle qui passe par les trois points B, C, et D. C'est donc le centre du cercle circonscrit au triangle BCD.

Exercices

Exercice 159

a) Tracer un segment [AB] de 6 cm de longueur et placer son milieu I.
Tracer une droite (d) passant par I et non perpendiculaire au segment [AB]
Sur cette droite, placer trois points M, N et P situés respectivement à 2, 3 et 5 cm de I.
Mesurer les distances MA, MB, NA, NB, PA et PB.
b) Tracer un segment [CD] de 6 cm de longueur et placer son milieu J.
Tracer la droite (d') perpendiculaire à [CD] et passant par J.
Sur cette droite, placer trois points R, S et T, situés respectivement à 2, 3 et 5 cm de J.
Mesurer les distances RC, RD, SC, SD, TC et TD.
c) Que remarque-t-on ?
Que représente la droite (d') pour le segment [CD] ?

Exercice 160

a) Tracer un segment [AB] de milieu M et une droite (d), passant par M, non perpendiculaire à [AB]
Placer un point I sur cette droite et tracer le cercle de centre I et de rayon IA.
Ce cercle passe-t-il par le point B ?
b) Tracer un segment [CD] de milieu N et une droite (d'), passant par N, perpendiculaire à [CD]
Placer un point J sur cette droite et tracer le cercle de centre J et de rayon JC.
Ce cercle passe-t-il par le point D ?
Quelle en est la raison ?

Exercice 161

[AB] est un segment de 8 cm de longueur. C est un point de [AB] tel que AC = 3 cm.
a) Tracer trois cercles différents passant par A et C.
b) Tracer trois cercles différents passant par B et C.
c) Tracer les deux droites passant par trois des centres de ces cercles.
d) Que peut-on dire de ces deux droites ?

Exercice 162

A et B sont deux points distants de 5 cm.
a) Où sont situés tous les points M possibles pour que AM = AB ?
b) Choisir un tel point M qui ne soit pas aligné avec A et B. On appelle H le milieu de [MB].
c) Pour quelle raison peut-on dire que HAM est un triangle rectangle ?
d) On trace la médiatrice (Δ) de [AH]. (Δ) coupe le cercle de centre A et de rayon 5 cm en K et en L.
e) Montrer que AKHL est un losange.

Exercice 163

Construire un triangle HIJ tel que : HI = 8 cm ; IJ = 7 cm et JH = 11 cm.

Construire le cercle circonscrit ($\mathcal{C}$) au triangle HIJ.

Mesurer le rayon de ($\mathcal{C}$).

En utilisant la valeur mesurée du rayon, calculer une valeur approchée de la longueur du cercle (C).

Exercice 164

Construire un triangle ABC tel que AB = 5 cm, AC = 8 cm et $\widehat{BAC}$ =110°.
Tracer son cercle circonscrit.

Exercice 165

Construire un triangle ABC tel que AB = 5 cm, AC = 8 cm et $\widehat{BAC}$ =70°.
Tracer son cercle circonscrit.

Exercice 166

Construire un triangle ABC tel que AB = 5 cm, AC = 8 cm et $\widehat{BAC}$ =90°.
Tracer son cercle circonscrit.

Exercice 167

Quelle conclusion peut-on tirer quant à la position du centre cercle circonscrit à partir des trois exemples précédents ?

Exercice 168

Tracer un segment [AB] de 7 cm.
Placer un point C tel que AC = 5 cm et BC = 3,5 cm.
De l'autre côté de (AB), placer un point D tel que AD = 4 cm et BD = 5 cm.
Tracer les cercles circonscrits aux triangles ABC et ABD.
Existe-t-il un cercle circonscrit au quadrilatère ACBD ?